模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- κ-饱和模型
- 基于可数不完全超滤的超幂是 $\aleph_1$-饱和的
- ω-饱和的是模态饱和的，因而是 HM 的
- 迂回引理
- Van Benthem 刻画定理

模型类的模态可定义性

问题: 哪些一阶逻辑结构的性质是模态可定义的?

记法

给定模态逻辑语言类型 τ，我们称 $(\mathfrak{M}, w)$ 是一个 τ-点模型（pointed model），其中 $\mathfrak{M}$ 是一个 τ-模型，w 是 $\mathfrak{M}$ 中状态

模型类的模态可定义性

定义

给定模态逻辑语言类型 τ，K 是由 τ-点模型组成的类

- 称 K 在互模拟下封闭，当且仅当若有 τ-点模型 $\mathfrak{M}, w \leftrightarrows \mathfrak{N}, v$ 且 $(\mathfrak{M}, w) \in$ K，则 $(\mathfrak{N}, v) \in$ K
- 称 K 在超积下封闭，当且仅当若 I 索引的每个 $(\mathfrak{M}_i, w_i) \in$ K，则超积 $\prod_U (\mathfrak{M}_i, w_i) \in$ K
- 令 $\overline{\mathrm{K}}$ 表示不在 K 中的 τ-点模型组成的类

模型类的模态可定义性

定义

给定模态逻辑语言类型 τ，K 是由 τ-点模型组成的类。

- 我们称 K 由一集模态逻辑公式可定义 （是一个 广义模态类 ），当且仅当存在一集 τ-公式 Γ 使得对任何 τ-点模型 $(\mathfrak{M}, w)$，

$$(\mathfrak{M}, w) \in \mathsf{M} \iff \forall \gamma \in \Gamma\ \mathfrak{M}, w \Vdash \gamma$$

- K 由一条模态逻辑公式可定义 （是一个 模态类 ）

模型类的模态可定义性

定理

给定模态逻辑语言类型 τ，K 是由 τ-点模型组成的类。下列命题等价

1. K 是一个广义模态类
2. K 在互模拟和超积下封闭，并且 $\overline{\mathrm{K}}$ 在超幂下封闭

模型类的模态可定义性

定理

给定模态逻辑语言类型 τ，K 是由 τ-点模型组成的类。下列命题等价

1. K 是一个模态类（由一条模态逻辑公式可定义）
2. K 和 $\overline{\text{K}}$ 都在互模拟和超积下封闭

框架可定义性

回忆：

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言类型 τ、τ-框架 $\mathfrak{F}$ 和 τ-公式 ϕ

- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 中的状态 w 上有效 （valid），记作 $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$ ，当且仅当对每个赋值 V 有 $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \phi$
- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效，记作 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ ，当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ 中的每个状态 w 上有效

框架可定义性

回忆：

定义 (框架与框架类有效性)

- 令 F 是一个 τ-框架类，称公式 ϕ 在框架类 F 上有效，记作 $\mathsf{F} \Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在 F 中的每个框架上有效。我们用 Λ_{F} 表示所有在 F 上有效的公式组成的集合，并称之为 F 的逻辑 (logic of F)
- 称 ϕ 有效，记作 $\Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在所有 τ- 框架上有效。

框架可定义性

定义 (框架与框架类有效性)

- 上述定义可以自然地推广到 τ-公式集。例如，我们可以说 公式集 Γ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效 、 公式集 Γ 在框架类 F 上有效 等等。
- 我们分别用 F_ϕ 和 F_Γ 表示 ϕ 或 Γ 在其上有效的框架组成的框架类

框架可定义性

定义 (框架可定义性)

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-框架类 K

- 我们称 ϕ 定义（或刻画）了框架类 K，当且仅当对任何 τ-框架 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F} \in \mathsf{K} \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{F} \Vdash \phi$
- 类似地，我们定义一个公式集 Γ 定义（或刻画）了框架类 K
- 一个框架类是 模态可定义的，当且仅当存在模态逻辑公式集定义它

框架可定义性

定义 (相对框架可定义性)

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-框架类 C 以及 τ-公式 ϕ

- 我们说 ϕ 在 C 中定义（或刻画）了框架类 K，当且仅当对任何 C 中框架 $\mathfrak{F}$，$\mathfrak{F} \in \mathrm{K} \Leftrightarrow \mathfrak{F} \Vdash \phi$
- 类似地，可以定义一个公式集 Γ 定义在 C 中（或刻画）了框架类 K

框架可定义性

我们常说某个模态或谓词逻辑语句定义了某个性质，即定义了满足该性质的框架类

例

- $p \to \Diamond p$ 和 $\forall xRxx$ 定义了自反性

框架可定义性

定义

如果一个框架类（或一个性质）可以同时被某个模态逻辑公式 ϕ 和谓词逻辑语句 α 定义，我们就称 ϕ 和 α 是彼此的（框架）对应（correspondents）

框架可定义性

例

- $T :\to \Diamond p$ 和 $\forall x Rxx$
- $4 : \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ 和 $\forall xyz\,(Rxy \to Ryz \to Rxz)$
- $5 : \Diamond p \to \Box\Diamond p$ 和 $\forall xyz\,(Rxy \to Rxz \to Ryz)$（欧性，euclidean）
- $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$ 和 $\forall xy(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy))$

框架可定义性

模态逻辑公式（框架）对应于二阶谓词逻辑语句

例

Löb 公式: $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ 定义了框架类

$$\{(W,R) \mid R \text{ 传递且 } R^{-} \text{ 良基}\}$$

框架可定义性

例

McKinsey 公式: $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ 不对应任何一阶逻辑语句

框架可定义与二阶逻辑

二阶谓词逻辑，在一阶谓词逻辑的基础上增加了二阶变元(以表示论域上子集和关系）以及相应的量词。一元二阶逻辑（monadic second-order logic）只允许表示子集（一元关系）的二阶变元和相应的量词。二阶谓词逻辑的语义是一阶谓词逻辑的自然推广。

框架可定义与二阶逻辑

事实

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-公式 ϕ（其中至多出现命题变元 $p_1, \ldots, p_n$）。对任意 τ-框架 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}$ 中 w 有

$$\mathfrak{F}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \; ST_x(\phi)[w]$$

$$\mathfrak{F} \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathfrak{F} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x \; ST_x(\phi)$$

定义

我们称 $\forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x \; ST_x(\phi)$ 是 ϕ 的 二阶翻译

习题

- 3.1.1, 3.1.2
- 3.2.1 - 3.2.4

下期预告

- 刻画框架可定义性
- 自动一阶对应