模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 超积与超幂
- 超积基本定理及其应用

Hennessy-Milner 类

定义

给定模态逻辑语言类型 τ 和 τ-模型类 K。我们称 K 是一个 Hennessy-Milner 类，或称 K 有 Hennessy-Milner 性质，当且仅当对任意 K 中模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$，以及分别在它们中的状态 w, w' 有，$w \leftrightsquigarrow w'$ 蕴含 $w \leftrightarrows w'$

模态饱和

定义

考虑基本模态逻辑语言 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 和公式集 Σ。称模型 $\mathfrak{M}$ 是 模态饱和的 （modally saturated, m-saturated），当且仅当对任意 $w \in W$ 任意公式集 Σ，如果 Σ 在 $R[w] = \{v \in W \mid Rwv\}$ 中有穷可满足，那么 Σ 在 $R[w]$ 可满足

模态饱和

事实

给定模态逻辑语言类型 τ。所有模态饱和的 τ-模型组成的类具有 Hennessy-Milner 性质

超滤扩张

有一种特殊的简单的超滤

定义

对任意非空集合 W，任意 $w \in W$

$$U_w = \{X \subset W \mid w \in X\}$$

是一个超滤，我们称形如 U_w 的超滤为 主超滤 （principal ultrafilter）

超滤扩张

给定模型 $\mathfrak{M} = (W, R_\triangle, V)_{\triangle \in \tau}$。我们可以将集合 $X \subset W$ 看作是一个公式 $\phi_X = \bigwedge \{\phi \mid \forall v \in X \ v \Vdash \phi\}$，一个滤 F 就可以看作是一个一致的公式集 $\{\phi_X\}_{X \in F}$（为什么?），一个超滤 U 可以看作是一个一致且完全的公式集（为什么?）

每个主滤 U_w 对应的正好是 w 上满足的公式集，我们称 w 实现 U_w 而未必所有的超滤都被某个 $w \in W$ 实现

超滤扩张

定义

对基本模态逻辑语言框架 $\mathfrak{F} = (W, R)$，定义函数

$m_\Diamond, m_\Box : P(W) \to P(W)$：

- $m_\Diamond(X) = \{w \in W \mid \exists v \in X\ Rwv\}$
- $m_\Box(X) = \{w \in W \mid \forall v \in W\ (Rwv \to v \in X)\}$

直观：如果我们把 X 看作公式 φ_X，那么 $m_\Diamond(X)$ 可以看作 $\Diamond\varphi_X$，而 $m_\Box(X)$ 可以看作 $\Box\varphi_X$

注意：$m_\Box(X) = W \setminus m_\Diamond(W \setminus X)$，$m_\Diamond(X) = W \setminus m_\Box(W \setminus X)$

超滤扩张

定义

给定模态语言类型 τ，和 τ-框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\tau\in\triangle}$。对每个 $n+1$ 元关系 $R_\triangle$，定义 $m_\triangle, m_\triangle^\delta : (P(W))^n \to P(W)$：

- $m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W \mid \exists v_1 \ldots v_n \in W\ (\bigwedge_{1\le i\le n} v_i \in X_i \wedge R_\triangle w v_1 \ldots v_n)\}$
- $m_\triangle^\delta(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W \mid \forall v_1 \ldots v_n \in W\ (R_\triangle w v_1 \ldots v_n \to \bigvee_{1\le i\le n} v_i \in X_i)\}$

超滤扩张

定义 (超滤扩张)

给定 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 是基本模态逻辑语言框架。定义 $\mathfrak{F}$ 的超滤扩张 $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} = (Uf(W), R^{ue})$。其中 $Uf(W) = \{u \subset P(W) | u$ 是 W 上超滤 $\}$，R^{ue} 定义如下：对 $u, v \in Uf(W)$，

$$R^{ue}uv \;\Leftrightarrow\; \forall X \subset W\ (X \in v \rightarrow m_{\Diamond}(X) \in u)$$

超滤扩张

定义 (超滤扩张)

给定模态逻辑语言 τ 和 τ-框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$。定义 $\mathfrak{F}$ 的超滤扩张 $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} = (Uf(W), R^{\mathrm{ue}}_\triangle)_{\triangle\in\tau}$。其中，$n+1$ 元的 $R^{\mathrm{ue}}_\triangle$ 定义如下：对 $u_0, u_1, \ldots u_n \in Uf(W)$，

$$R^{\mathrm{ue}}_\triangle u_0 u_1 \ldots u_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall X_1, \ldots, X_n \subset W \ \left(\bigwedge_{1\le i\le n} X_i \in u_i \to m_\triangle(X_1, \ldots, X_n) \in u_0 \right)$$

超滤扩张

定义 (超滤扩张)

给定模态逻辑语言 τ 和 τ-模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，定义模型 $\mathfrak{M}$ 的超滤扩张 $\mathfrak{ue}M = (\mathfrak{ue}\mathfrak{F}, V^{\mathfrak{ue}})$。其中

$$V^{\mathfrak{ue}}(p_i) = \{u \in Uf(W) \mid V(p_i) \in u\}$$

超滤扩张

事实

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意个 $w \in W$，令 $u_w = \{X \subset W \mid w \in X\}$ 是 w 生成的主超滤。则 $w \mapsto u_w$ 是 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 的 嵌入 。即，它是一一的，并且对任意 $w, v \in W$，Rwv 当且仅当 $R^{\mathrm{ue}} u_w u_v$， $w \in V(p)$ 当且仅当 $u_w \in V^{\mathrm{ue}}(p)$

超滤扩张

例

考虑 $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$，$\mathrm{ue}\mathfrak{F}$ 长什么样?

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$。对任意基本模态逻辑语言公式 ϕ 和任意 $u \in Uf(W)$ 有：

$$V(\phi) \in u \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \phi$$

因而，对任意 $w \in W$ 有 $w \leftrightsquigarrow u_w$

注意：$m_\Diamond(V(\psi)) = V(\Diamond\psi)$

超滤扩张

定理

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$， $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ 是模态饱和的

推论

给定基本模态逻辑模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}'$ 以及 w, w' 分别是其中的状态，则

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_w \leftrightharpoons \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u_{w'}$$

习题

- 2.5.4, 2.5.6, 2.5.7, 2.5.10

下期预告

- Van Benthem 刻画定理