

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

前情提要

- 模态逻辑的语言, 模态语言类型
- 框架与模型
- 模态逻辑的语义概念: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$, $\mathfrak{M} \Vdash \phi$, $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$,
 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$, $F \Vdash \phi$

模态语义后承

记法

- 如果 S 是模型类, 称 \mathfrak{M} 是 来自 S 的模型, 即 $\mathfrak{M} \in S$
- 如果 S 是框架类, 称 \mathfrak{M} 是 来自 S 的模型, 即 \mathfrak{M} 是 S 中某个框架基础上的模型
- 给定模态逻辑语言类型 τ , 当我们提到一个 τ -结构类 S , 要么 S 是一个 τ -模型类, 要么是一个 τ -框架类

模态语义后承

定义 (局部语义后承)

给定模态语言类型 τ , 和 τ -结构类 S 。令 Σ 和 ϕ 分别是语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式集和公式。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的局部语义后承, 记作 $\Sigma \Vdash_S \phi$, 当且仅当对任意来自 S 的模型 \mathfrak{M} 以及 \mathfrak{M} 中的任何状态 w 有, $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$

模态语义后承

例

- $\diamond\diamond p \Vdash_{\text{Tran}} \diamond p$
- $p \Vdash_S \neg p$, 其中 S 是基本模态逻辑的模型类:

$$S = \{(\mathfrak{F}, V) \mid V(p) = \emptyset\}$$

模态语义后承

定义 (全局语义后承)

同样给定 τ, S, Σ, ϕ 。我们称 ϕ 是 Σ 的关于 S 的全局语义后承，记作 $\Sigma \Vdash_S^g \phi$ ，当且仅当对每个来自 S 的结构 \mathcal{G} 都有， $\mathcal{G} \Vdash \Sigma$ 蕴含 $\mathcal{G} \Vdash \phi$

例

$p \Vdash_S^g \Box p$ ，其中 S 可以是任何结构类

注意：我们一般关心基于框架类的局部语义后承

K-系统

在基本模态逻辑语言下定义希尔伯特式的模态公理系统 **K**

定义

- **K** 的证明规则 包括
 - 分离规则 (*modus ponens*): 由 ϕ 和 $\phi \rightarrow \psi$ 可证 ψ
 - 必然化规则 (*generalization*): 由 ϕ 可证 $\Box\phi$
 - 统一代入规则 (*uniform substitution*): 由 ϕ 可证 ϕ^σ

K-系统

定义

- 定义一个 **K-证明** 为一个有穷公式序列，其中每条公式要么是 **K** 的公理，要么是由之前的公式应用 **K** 中证明规则得到的。
- 我们称一个公式 ϕ 是 **K-可证的**，当且仅当 ϕ 是某个 **K-证明** 的最后一条公式，记作 $\vdash_K \phi$

K-系统

例

- $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$
- $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$
- $\Box(p \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(p \wedge q))$
- $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)), \text{ 即 } (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

K 的可靠性

- 所有命题逻辑重言式例式、(Dual)和(K)都是有效的
- 分离规则保持框架类，框架全局/局部有效性，模型全局真和局部真（满足）
- 统一代入保持框架类，框架全局/局部有效性，不保持模型全局真或局部真
- 必然化规则保持框架类，框架（全局）有效性，模型全局真，不保持框架局部有效性或模型局部真

K 的可靠性

我们一般期望用模态逻辑公理系统来刻画 (框架类) 有效性

事实

K 是 (针对所有框架类) 可靠的, 即对任意框架 \mathfrak{F} , $\vdash_{\mathbf{K}} \phi$ 蕴含 $\mathfrak{F} \models \phi$

事实上, **K** 也是 (针对所有框架类) 完全的。在这个意义上, 我们称 **K** 是 (克里普克语义学意义上) 极小的模态逻辑公理系统

正规模态逻辑

定义 (正规模态逻辑)

我们定义 **正规模态逻辑** (normal modal logic) 为一个公式集 Λ , 它包含所有的命题逻辑重言式例式、(K)、(Dual) 并且在分离规则、统一替换规则和必然化规则下封闭。

例

- \mathbf{K} 是最小的正规模态逻辑
- $\mathbf{K4}$ 是 \mathbf{K} 的基础上添加公理 $\diamond\diamond p \rightarrow \diamond p$ 得到的
- 令 F 是所有基本模态逻辑框架组成的框架类, 定义

$$\Lambda_F = \{\phi \mid F \Vdash \phi\}$$

则 Λ_F 是一个正规模态逻辑

模态不变性

回忆：一阶谓词逻辑表达力的界限：同态、同构、子模型、初等等价

不变性 (invariance) 结果刻画了一种人工语言的表达力界限，同时勾勒出所关心的研究领域

模态不变性

定义

- 给定模态语言类型 τ 和 τ -模型 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 以及它们中的状态 w 和 w' 。定义 w 的 τ -理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$ 。我们称 w 和 w' 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{M}', w'$ 或 $w \leftrightarrow w'$ ，当且仅当它们有相同的 τ -理论
- 我们定义模型 \mathfrak{M} 的 τ -理论 为 $\{\phi \mid \mathfrak{M} \Vdash \phi\}$ 。我们称模型 \mathfrak{M} 和 \mathfrak{M}' 是模态等价的，记作 $\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}'$ ，当且仅当它们有相同的 τ -理论

模态不变性

事实

给定模态语言类型 τ , 索引集 I . 对每个 $i \in I$, \mathfrak{M}_i 是一个 τ -模型. 对任意 $i \in I$ 任意 \mathfrak{M}_i 中 w 有

$$\mathfrak{M}_i, w \leftrightarrow \bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i, w$$

即不交并保持模态不变性

证明.

对 τ -公式复杂度归纳证明

习题

- 1.5.1 (改为 “ $\Box p \Vdash_{M(K)}^g p$ ”)
- 1.5.2
- 1.5.3 (改为 “M denote the class of all models, ...
 $\Vdash_M^g \dots \Vdash_M^g$ ”)

教材勘误:

<https://staff.fnwi.uva.nl/y.venema/mlbook/errata.pdf>

下期预告

- 模态不变性与互模拟
- 有穷模型性