模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

课程信息

- 时间地点:
  - 周一 18:30 - 20:10，HGX401
- 网站:

  `https://aplacenearby.ggr.fun/modal2021`
- 教材：Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002

前情提要

- 命题逻辑与一阶谓词逻辑的语言、语义和公理系统
- 命题逻辑是可判定的，一阶谓词逻辑不是可判定的
- 命题逻辑公式定义布尔函数，一阶谓词逻辑语句定义结构类

前情提要

定义 (基本模态语言)

我们定义基本模态语言（basic modal language）为：

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Diamond\phi$$

基本模态逻辑的语言在命题逻辑的基础上添加了一个一元模态词（modal operator）：$\Diamond$ （Diamond）

前情提要

记法

我们规定如下缩写：

$$\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi \quad \text{(Box)}$$

$$\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

$$\top := \neg\bot$$

模态逻辑的语言

例

一般将 $\Diamond\phi$ 读作"ϕ 是可能的"，$\Box\phi$ 即 $\neg\Diamond\neg\phi$ 则表示"非 ϕ 是不可能的"，也即"ϕ 是必然的"。尝试翻译：

- $\Box\phi \to \Diamond\phi$
- $\phi \to \Diamond\phi$
- $\phi \to \Box\Diamond\phi$
- $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$

模态逻辑的语言

例

在认知逻辑（epistemic logic）中，$\Box\phi$ 常被写作 $K\phi$，读作 “(某人）知道 ϕ”

- $K\phi \to \phi$
- $K\phi \to KK\phi$

模态逻辑的语言

例

在可证性逻辑（provability logic）中 $\Box\phi$ 读作“ϕ 是可证的”

- $\Box\phi \to \Box\Box\phi$
- $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (Löb' formula)

定理 (Löb 定理)

若 PA $\vdash \mathsf{Prov}_{\mathsf{PA}}(\phi) \to \phi$，则 PA $\vdash \phi$

模态逻辑的语言

定义 (模态语言类型)

一个 模态语言类型 （modal similarity type）是一个有序对 $\tau = (O, p)$，其中 O 是模态词的集合，非空。$p : O \to \mathbb{N}$ 告诉我们每个模态词是几元的。

给定命题变元符号集 Φ 和模态语言类型 $\tau = (O, p)$，唯一决定了模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$：

$$\phi ::= p \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \triangle\, (\phi_1, \ldots, \phi_{\rho(\triangle)})$$

其中 $p \in \Phi$、$\triangle \in O$。用 $Form(\tau, \Phi)$ 表示该语言的公式集

模态逻辑的语言

例

基本时态逻辑：有两个一元模态词 $O = \{F, P\}$。F 和 P 类似 $\Diamond$ 算子。$F\phi$ 常读作“在未来某个时刻 ϕ（成立）”，$P\phi$ 读作“在过去某个时刻 ϕ”。通常定义 $G\phi \; := \neg F\neg\phi$，表示“未来总是 ϕ”；定于 $H\phi \; := \neg P\neg\phi$，表示“过去一直 ϕ”。

- $P\phi \to GP\phi$
- $F\phi \to FF\phi$
- $GFp \to FGp$ (Mckinsey formula)

模态逻辑的语言

例

时态逻辑可以加入更丰富的模态词，如二元模态词 $U(\phi,\psi)$，读作“ψ 直到 ϕ”（ψ until ϕ），二元模态词 $S(\phi,\psi)$，读作“自从 ϕ，ψ”（ψ since ϕ）

- $F\phi \leftrightarrow U(\phi,\top)$，$P\phi \leftrightarrow S(\phi,\top)$

定义 (代入)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau,\Phi)$，一个该语言的 代入 （substitution）是一个函数 $\sigma:\Phi\rightarrow Form(\tau,\Phi)$。一个代入可以被扩张到定义在全体公式集上的函数 $(\cdot)^{\sigma}:Form(\tau,\Phi)\rightarrow Form(\tau,\Phi)$：

模态逻辑的语言

定义 (代入)

$$
\begin{aligned}
\bot^\sigma &= \bot \\
p^\sigma &= \sigma(p) \\
(\neg\phi)^\sigma &= \neg\phi^\sigma \\
(\phi \vee \psi)^\sigma &= \phi^\sigma \vee \psi^\sigma \\
(\triangle\ (\phi_1, \ldots, \phi_n))^\sigma &= \triangle\ (\phi_1^\sigma, \ldots, \phi_n^\sigma)
\end{aligned}
$$

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的框架)

定义基本模态逻辑语言的 框架 （Frame）是一个有序对 $\mathfrak{F} = (W, R)$，其中

- W 是一个非空集合（状态集、可能世界集）
- R 是 W 上的二元关系（可及关系）

注意: 一个基本模态逻辑语言的框架也是一个仅含有一个二元谓词符号的一阶逻辑语言的结构

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的模型)

- 基本模态逻辑语言的 模型 是一个有序对 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ (当 $\mathfrak{F} = (W, R)$ 时也记作三元组 (W, R, V))，其中 $\mathfrak{F}$ 是一个基本模态逻辑语言的框架，而 V 是以命题符号集 Φ 为定义域到 $P(W)$ 中的 赋值函数 （即 $V : \Phi \to P(W)$），也即对每个命题符号 $p \in \Phi$，$V(P) \subset W$。
- 我们称模型 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ 是 框架 $\mathfrak{F}$ 基础上的模型 ，或 $\mathfrak{F}$ 是 模型 $\mathfrak{M}$ 底下的框架

模型与框架

注意：

- 直观上，模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中的赋值函数告诉我们每个命题 p 当且仅当在 $V(p)$ 中的那些可能世界或状态下成立
- 一个基本模态逻辑语言的模型也可以看作是一个含有一个二元谓词符号和无穷个一元谓词符号的一阶逻辑语言的结构 $(W, R, V_p)_{p\in\Phi}$

模型与框架

定义 (基本模态逻辑语言的语义)

假设 w 是基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中的状态 (即 $w \in W$)，我们对基本模态逻辑语言公式 ϕ 递归定义三元关系 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 状态上成立 （记作 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$） 如下：

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \Leftrightarrow w \in V(p)$$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ 从不

定义 (基本模态逻辑语言的语义)

假设 w 是基本模态逻辑语言模型 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ 中的状态（即 $w \in W$），我们对基本模态逻辑语言公式 ϕ 递归定义三元关系 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 状态上成立 （记作 $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$）如下：

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \nVdash \phi$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \vee \psi \Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ 或 } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\phi \Leftrightarrow \exists v \in W \ (Rwv \wedge \mathfrak{M}, v \Vdash \phi)$$

模型与框架

记法

- 对公式集 Σ，我们用 $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ 表示 Σ 中的每个公式在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 状态上成立
- 赋值函数 $V : \Phi \to P(W)$ 可以被自然地推广到所有公式上:

$$V(\phi) = \{w \in W \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}$$

模型与框架

定义

- 我们称公式 ϕ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中 全局真 （globally true）或 普遍真 （universally true），记作 $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ ，当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的每个状态上成立。$\mathfrak{M}$
- 称公式 ϕ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上可满足 ，当且仅当它在 $\mathfrak{M}$ 中的某个状态上成立。
- 类似地，我们可以定义一集公式 Σ 在模型 $\mathfrak{M}$ 上全局真、可满足。

模型与框架

例

- $W = 5$，R 是后继关系，$V(p) = \{1, 2\}$，$V(q) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$，$V(r) = \emptyset$
  - $\mathfrak{M}, 0 \Vdash \Diamond\Box p \to p$ ？
  - $1 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r)$ ？
  - $0 \Vdash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$ ？
  - $\mathfrak{M} \Vdash \Box q$ ？

例

- $W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$，$xRy$ 当且仅当 $x < y$ 且 x 整除 y，$V(p) = \{4, 8, 12, 24\}$，$V(q) = \{6\}$
  - $4 \Vdash \Box p$
  - $2 \nVdash \Box p$
  - $2 \Vdash \Diamond(q \wedge \Box p) \wedge \Diamond(\neg q \wedge \Box p)$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 给定模态逻辑语言类型 τ，一个 τ-框架 $\mathfrak{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ 包含一个非空状态集合 W 以及每个 τ 中 n 元模态词 $\triangle$ 对应的 $(n+1)$ 元关系 $R_\triangle \subset W^{n+1}$
- 一个 (τ, Φ)-模型是有序对 $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$，其中 $\mathfrak{F}$ 是一个 τ-框架，$V : \Phi \to P(W)$ 是赋值函数

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ)- 模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同：

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\phi_1, \ldots, \phi_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{存在 } v_1, \ldots, v_n \in W \text{ 使得 } R_{\triangle} w v_1 \ldots v_n$$

$$\text{且对任意 } 1 \leq i \leq n \text{ 有 } \mathfrak{M}, v_i \Vdash \phi_i$$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ)- 模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同：

若 Δ 是 0 元模态词，即 R_Δ 是 W 子集

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Delta \quad \Leftrightarrow \quad w \in R_\Delta$$

模型与框架

任意模态逻辑语言类型的语义

定义

- 一个模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$ 的公式 ϕ 在 (τ, Φ)- 模型 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上成立 的定义仅在模态词的处理上与基本模态逻辑语义有所不同：

一般用 $\triangledown$ 表示 $\vartriangle$ 的对偶

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangledown(\phi_1, \ldots, \phi_n) \quad \Leftrightarrow \quad ?$$

模型与框架

回忆: 命题逻辑重言式与一阶谓词逻辑有效性

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 中的状态 w 上有效 （valid），记作 $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$ ，当且仅当对每个赋值 V 有 $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \phi$
- 公式 ϕ 在框架 $\mathfrak{F}$ 上有效 ，记作 $\mathfrak{F} \Vdash \phi$ ，当且仅当 ϕ 在 $\mathfrak{F}$ 中的每个状态 w 上有效

定义 (框架与框架类有效性)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$

- 令 F 是一个 τ-框架类，称公式 ϕ 在框架类 F 上有效，记作 $\mathsf{F} \Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在 F 中的每个框架上有效。我们用 Λ_{F} 表示所有在 F 上有效的公式组成的集合，并称之为 F 的逻辑 (logic of F)
- 称 ϕ 有效，记作 $\Vdash \phi$，当且仅当 ϕ 在所有 τ- 框架上有效。

模型与框架

例

- $\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
- $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
  - 考虑传递框架类

习题

- 1.3.2 - 1.3.6

下期预告

- 模态语义后承
- 正则模态逻辑