

模态逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2021 年春季

课程信息

- 时间地点:

- 周一 18:30 - 20:10, HGX401

- 网站:

<https://aplacenearby.ggr.fun/modal2021>

- 教材: Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde

Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2002

回顾：命题逻辑

命题逻辑语言的符号：

- 可数无穷多个 命题变元符号： p_0, p_1, p_2, \dots
- 命题常数符号： \perp (Bottom) , \top (Top)
- 联词： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- 辅助符号： $(,)$

回顾：命题逻辑

命题逻辑合式公式

- 每个命题变元符号、命题常数符号都是合式公式
- 若 ϕ, ψ 是合式公式, 那么
 $\neg\phi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \phi \leftrightarrow \psi$ 也是合式公式

记法

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (真值指派)

我们说 V 是一个 **真值指派**，当且仅当 V 是以由命题符号组成的集合 \mathcal{A} 为定义域、以**真值集合** $\{0, 1\}$ 为值域的函数

$$V : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑的语义

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 V , 我们定义 V 的扩展 $\bar{V} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $p \in \mathcal{A}$, $\bar{V}(p) = v(p)$, $\bar{V}(\perp) = 0$, $\bar{V}(\top) = 1$

1 对任意公式 ϕ, ψ ,

$$\bar{V}(\neg\phi) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{V}(\phi) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

回顾：命题逻辑

命题逻辑公理系统：

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

- 推演规则：分离规则

回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑语言符号：

- 命题联词： \neg, \rightarrow
- 量词： \forall, \exists
- 变元： v_1, v_2, \dots
- 常数符号： c_1, c_2, \dots
- 函数符号： f_1, f_2, \dots
- 谓词符号： P_1, P_2, \dots
- 等词： \approx

回顾：一阶谓词逻辑

一阶谓词逻辑的公理系统：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可以在 α 中无冲突地替代 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中变元 x 不在 α 中自由出现
- 5 $x \approx x$
- 6 $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$, 其中 α 为原子公式, 且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

- 结构: $(|\mathcal{U}|, P_1^{\mathcal{U}}, \dots, P_n^{\mathcal{U}}, f_1^{\mathcal{U}}, \dots, f_m^{\mathcal{U}}, c_1^{\mathcal{U}}, \dots, c_k^{\mathcal{U}})$
- 赋值: $s : \mathcal{V} \rightarrow |\mathcal{U}|$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

■ 塔斯基真定义：

■ α 是原子公式

■ $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 \approx t_2$, 当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

■ $(\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \dots t_n$, 当且仅当 $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

■ $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$, 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$

■ $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \rightarrow \gamma$, 当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$

回顾：一阶谓词逻辑

一阶逻辑的语义

■ 塔斯基真定义：

- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$, 当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$, 有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \beta$
其中 s_d^x 是通过对 s 改造得到的 \mathfrak{A} -赋值：

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

回顾

命题逻辑与一阶逻辑的可靠性与完全性:

$$\Sigma \vdash \phi \Leftrightarrow \Sigma \models \phi$$

注意: 命题逻辑是可判定的, 一阶谓词逻辑不是可判定的

回顾

“定义”

- 命题逻辑的定义：一个命题逻辑公式 ϕ “定义” 了一个布尔函数 B_ϕ
- 一阶逻辑语句定义结构类
- 一阶谓词逻辑公式在结构中定义结构论域上的集合、关系、函数

同构与初等等价

回顾

经典逻辑（命题逻辑、一阶谓词逻辑）刻画的是“真”这个模态词

- 模态逻辑可以被用来刻画更多的模态词，如：可能/必然，将来/过去，知道，应该/允许，等等
- 模态（命题）逻辑是命题逻辑的扩张，是二阶谓词逻辑的片断

模态逻辑的语言

定义 (基本模态语言)

我们定义基本模态语言 (basic modal language) 为:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \diamond\phi$$

基本模态逻辑的语言在命题逻辑的基础上添加了一个
元模态词 (modal operator): \diamond (Diamond)

模态逻辑的语言

记法

我们规定如下缩写：

$$\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi \quad (\text{Box})$$

$$\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$$

$$\top := \neg\perp$$

模态逻辑的语言

例

一般将 $\diamond\phi$ 读作“ ϕ 是可能的”， $\Box\phi$ 即 $\neg\diamond\neg\phi$ 则表示“非 ϕ 是不可能的”，也即“ ϕ 是必然的”。尝试翻译：

■ $\Box\phi \rightarrow \diamond\phi$

■ $\phi \rightarrow \diamond\phi$

■ $\phi \rightarrow \Box\diamond\phi$

■ $\diamond\phi \rightarrow \Box\diamond\phi$

模态逻辑的语言

例

在认知逻辑 (epistemic logic) 中, $\Box\phi$ 常被写作 $K\phi$, 读作“(某人) 知道 ϕ ”

- $K\phi \rightarrow \phi$

- $K\phi \rightarrow KK\phi$

模态逻辑的语言

例

在可证性逻辑 (provability logic) 中 $\Box\phi$ 读作 “ ϕ 是可证的”

- $\Box\phi \rightarrow \Box\Box\phi$

- $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ (Löb' formula)

定理 (Löb 定理)

若 $PA \vdash \text{Prov}_{PA}(\phi) \rightarrow \phi$, 则 $PA \vdash \phi$

模态逻辑的语言

定义 (模态语言类型)

一个 **模态语言类型** (modal similarity type) 是一个有序对 $\tau = (O, \rho)$, 其中 O 是模态词的集合, 非空。 $\rho : O \rightarrow \mathbb{N}$ 告诉我们每个模态词是几元的。

给定命题变元符号集 Φ 和模态语言类型 $\tau = (O, \rho)$, 唯一决定了模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$:

$$\phi ::= p \mid \perp \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid \Delta(\phi_1, \dots, \phi_{\rho(\Delta)})$$

其中 $p \in \Phi$ 、 $\Delta \in O$ 。用 $Form(\tau, \Phi)$ 表示该语言的公式集

模态逻辑的语言

例

基本时态逻辑：有两个一元模态词 $O = \{F, P\}$ 。 F 和 P 类似 \diamond 算子。 $F\phi$ 常读作“在未来某个时刻 ϕ (成立)”， $P\phi$ 读作“在过去某个时刻 ϕ ”。通常定义 $G\phi := \neg F\neg\phi$ ，表示“未来总是 ϕ ”；定于 $H\phi := \neg P\neg\phi$ ，表示“过去一直 ϕ ”。

- $P\phi \rightarrow GP\phi$

- $F\phi \rightarrow FF\phi$

- $GFp \rightarrow FGp$

(Mckinsey formula)

模态逻辑的语言

例

时态逻辑可以加入更丰富的模态词，如二元模态词 $U(\phi, \psi)$ ，读作“ ψ 直到 ϕ ” (ψ until ϕ)，二元模态词 $S(\phi, \psi)$ ，读作“自从 ϕ , ψ ” (ψ since ϕ)

- $F\phi \leftrightarrow U(\phi, \top)$, $P\phi \leftrightarrow S(\phi, \top)$

模态逻辑的语言

定义 (代入)

给定模态逻辑语言 $ML(\tau, \Phi)$, 一个该语言的 **代**

入 (substitution) 是一个函数 $\sigma : \Phi \rightarrow Form(\tau, \Phi)$ 。一个代入可以被扩张到定义在全体公式集上的函数

$(\cdot)^\sigma : Form(\tau, \Phi) \rightarrow Form(\tau, \Phi)$:

下期预告

模型与框架