集合论进阶

(大基数理论)

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年春季

课程信息

课程名称: 集合论进阶

课程序号: PHIL130310.01

前期课程: 数理逻辑、集合论、(高等逻辑)

预设知识: 一阶谓词逻辑（语言、结构、同构、初等等价、完全性定理、紧致性定理)、公理化算术（皮亚诺算术、哥德尔不完全性定理)、公理化集合论 (ZF 公理系统、序数、基数、集合论模型等)

课程信息

课程内容：大基数理论

参考书目：

- Jech, Thomas 2002, *Set Theory*, 3rd Millennium ed., Springer.
- Kanamori, Akihiro 2009, *The Higher Infinite: Large Cardinal in Set Theory from Their Beginnings*, 2nd ed., Springer.

期末考核：论文

公理化集合论与不完全性

- 作为数学基础的 Zermelo-Fraenkel 公理集合论
  - ZF 是一个公理化的一阶理论，ZF 无法有穷公理化
  - 在集合论中定义自然数结构、实数……
- ZF 可以解释 PA。因此，如果 ZF 是一致的，那么它不是完全的
- 一些具体的数学命题，如连续统假设（CH）独立于 ZF / ZFC

理论解释理论

事实

ZF 可以解释 PA

例

$\forall x \forall y (S\,x = S\,y \rightarrow x = y)$

理论解释理论

事实

ZF 可以解释 PA

理论解释理论

事实

ZF 可以解释 PA，因而 $\mathrm{Con(ZF)} \to \mathrm{Con(PA)}$

集合论的模型论

ZF 的限制与扩张:

- ZF – 基础公理
- $\mathsf{ZF}^- = \mathsf{ZF}$ – 替换公理
- ZF – 无穷公理
- ZFC
- $\mathsf{ZF} + V = L$
- ZF + LCA

集合论的模型论

例

- 集合模型
  - $(V_\omega, \in) \vDash \mathrm{ZF} - $无穷公理
  - $(M, E) \vDash \mathrm{ZF} - $基础公理
- 类模型
  - $(L, \in) \vDash \mathrm{ZF} + V = L$
  - $(V, \in) \vDash \mathrm{ZF}$

定义 (相对化)

定义 $(M, E) \models \varphi$ 和 $\varphi^{(M,E)}$。

塔斯基真定义与塔斯基真不可定义定理

塔斯基真定义与塔斯基真不可定义定理

集合论的模型论

事实

- ZF 可证:
  - $V_\omega \vDash \mathsf{ZF} - $无穷公理
  - 存在集合 $(M, E) \vDash \mathsf{ZF} - $替换公理 $+ \Sigma_2$-替换公理
- PA 可证:对任意集合论句子 σ,如果 $\sigma \in \mathsf{ZF}$,那么 $\mathsf{ZF} \vdash \sigma^L$,而且 $\mathsf{ZF} \vdash \mathsf{AC}^L$、$\mathsf{ZF} \vdash \mathsf{CH}^L$ (简记为 $\mathsf{ZF} \vDash (\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH})^L$)
- ZF + LCA 可证:若 κ 是大基数,那么 $V_\kappa \vDash \mathsf{ZF}$

集合论的模型论

事实

- $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} - \text{无穷公理})$
- $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF} - \text{替换公理} + \Sigma_2\text{-替换公理})$
- $\mathrm{Con}(\mathrm{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC})$
- $\mathrm{ZF} + \mathrm{LCA} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ZF})$

习题

ZF 不是有穷可公理化的