

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020-2021 冬季

前情提要

前情提要

我们定义了两种“定义”

- 结构内的可定义性: 给定结构
 - 定义的是该结构论域上的某个 k -元关系
 - 由一个 **公式** 定义
- 定义结构类: 给定语言
 - 定义的是该语言的某个结构类
 - 由 **一则** 闭语句定义 (初等类); 由 **一集** 闭语句定义 (广义初等类)

同态与同构

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同态** (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元谓词符号 P_i 和每组 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$(a_1, \dots, a_n) \in P_i^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in P_i^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同态** (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 **谓词符号** P , 和每组 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同态** (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 **函数符号** f , 和每组 $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$, 有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 \mathcal{L} 。令 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B} 为两个 \mathcal{L} 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同态** (homomorphism), 当且仅当它满足下述条件

- 对每个 **常数符号** c , 有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h: |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ 是从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态

- 如果同态 h 是 **单射** 的, 我们称 h 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **嵌入** (embedding);
- 如果 h 是双射 (既是单射, 又是满射), 我们称 h 是一个从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的 **同构** (isomorphism)。此时, 我们称 \mathfrak{A} 与 \mathfrak{B} 同构, 记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态, s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 1 对任意项 t , $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 2 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

- 3 若 h 是单射, 则 α 可含等词; 若 h 是双射, 可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态, s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 1 对任意项 t , $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 2 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

- 3 若 h 是单射, 则 α 可含等词; 若 h 是双射, 可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态, s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 1 对任意项 t , $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 2 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

- 3 若 h 是单射, 则 α 可含等词; 若 h 是双射, 可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态, s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 1 对任意项 t , $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 2 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

- 3 若 h 是单射, 则 α 可含等词; 若 h 是双射, 可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 \mathcal{L} 。假定 h 是从 \mathcal{L} 结构 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{B} 的同态, s 是 \mathfrak{A} 赋值。则

- 1 对任意项 t , $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
- 2 对任何不含量词且不含等词的公式 α ,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

- 3 若 h 是单射, 则 α 可含等词; 若 h 是双射, 可含量词

同态与同构

定义

如果 $h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ 是从 \mathfrak{A} 到 \mathfrak{A} 的一个同构, 那么我们称 h 是 \mathfrak{A} 上的 **自同构** (automorphism)

推论

令 h 是 \mathfrak{A} 上的一个自同构, 并且 $R \subset \mathfrak{A}^n$ 是一个 \mathfrak{A} 中 **可定义的** n 元关系, 则对任意 \mathfrak{A} 中元素 a_1, \dots, a_n 有,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \Leftrightarrow (h(a_1), \dots, h(a_n)) \in R$$

同态与同构

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑结构

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

初等等价

定义

给定语言 \mathcal{L} 。我们说两个 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 与 \mathfrak{B} **初等等价**，记作 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ，当且仅当对任意 \mathcal{L} 闭语句 σ 有，

$$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \sigma$$

初等等价

一些推论:

给定语言 \mathcal{L} 和 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{B}

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 反之未必
- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, 当且仅当对任意 \mathcal{L} -初等类 \mathcal{K} 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

一阶逻辑希尔伯特系统的可靠性

可靠性定理

定理 (可靠性定理)

给定语言 \mathcal{L} 的公式集 Γ 和公式 φ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明.

对证明序列归纳

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \dots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 。归纳证明：对任意 $1 \leq i \leq n$ 有, $\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$, 使得 $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \dots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 。归纳证明：对任意 $1 \leq i \leq n$ 有, $\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$, 使得 $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \dots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 。归纳证明：对任意 $1 \leq i \leq n$ 有, $\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$, 使得 $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$

可靠性定理

假设 $\langle \beta_1, \dots, \beta, n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$ 。归纳证明：对任意 $1 \leq i \leq n$ 有, $\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$, 使得 $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$

接下来, 我们只需要证明所有公理是有效的

可靠性定理

回顾一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

首先，公理包括所列公式（模式）的所有 **全称概括**。所以，我们需要证明：

如果公式 φ 是普遍有效的，那么 $\forall x\varphi$ 也是 （习题 5.1.11）

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可无冲替代 α 中 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可无冲替代 α 中 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

任给 \mathcal{L} -结构 \mathfrak{A} 和 \mathfrak{A} -赋值 s , 定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$, 使得对任意 \mathcal{L} 中素公式 β 有,

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \beta$$

归纳证明, 对所有 \mathcal{L} -公式 α 有,

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \alpha$$

若 α^P 是重言式, 则对任意 (\mathfrak{A}, s) 有, $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可无冲替代 α 中 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

假设 t 可以无冲突地替换公式 φ 的 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\varphi$, 我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi_t^x$ 。而由下述引理,

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x , 则

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \models \varphi$$

我们只需证: $(\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \models \varphi$, 而由 $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\varphi$, 这显然成立

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x , 则

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \models \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

■ φ 是原子公式

引理: $\bar{s}(u_t^x) = \overline{s_{\bar{s}(t)}^x}(u)$

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x , 则

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \models \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- φ 是几个子公式的布尔组合

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以无冲突地替换变元 x , 则

$$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \models \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- $\varphi = \forall y\psi$

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可无冲替代 α 中 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$ (习题 5.1.8)
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：

- 1 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
- 2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, 其中项 t 可无冲替代 α 中 x
- 3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$ (习题 5.1.8)
- 4 $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, 其中 x 不在 α 中自由出现 (习题 5.19)

可靠性定理

若语言中含有等词，则还有

1 $x \approx x$

2 $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$ ，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 替换为 y 所得到的公式 (习题 5.1.10)

下期预告

- 一阶逻辑希尔伯特公理系统的完全性

习题

- 5.3.2 (1), (2)*, 5.3.3 - 5.3.5, 5.3.6 (1), 5.3.8