

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

## 前情提要

# 前情提要

## 一阶逻辑希尔伯特公理系统

- 1 对应的命题逻辑公式  $\alpha^P$  是重言式的一阶逻辑公式  $\alpha$
- 2  $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ , 其中项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$
- 3  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4  $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ , 其中  $x$  不在  $\alpha$  中自由出现
- 5  $x \approx x$
- 6  $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$ , 其中  $\alpha$  为原子公式, 且  $\alpha'$  是将  $\alpha$  中若干个  $x$  的出现替换为  $y$  所得到的公式

# 前情提要

承自命题逻辑的元定理:

- 演绎定理
- 重言规则
- 逆否命题、反证法

一阶逻辑特色的元定理:

- 概括定理
- 常数概括定理
- 约束变元替换定理

# 关于等词的元定理

## 关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

# 前束范式

# 前束范式

定义 (量词前束公式)

我们称具有

$$Q_1x_1 \dots Q_nx_n\alpha$$

形式 (其中  $Q_i$  是  $\forall$  或  $\exists$ , 且  $\alpha$  不含量词) 的公式为 **量词前束公式**



# 前束范式

## 定理 (前束范式定理)

对任何公式  $\alpha$  都存在量词前束公式  $\alpha'$ , 使得

$$\alpha \vdash \alpha'$$

# 前束范式

## 用到的元定理

$$Q1a \quad \neg \forall x \alpha \vdash \exists x \neg \alpha$$

$$Q1b \quad \neg \exists x \alpha \vdash \forall x \neg \alpha$$

$$Q2a \quad (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \alpha \text{ 中自由出现}$$

$$Q2b \quad (\alpha \rightarrow \exists x \beta) \vdash \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \alpha \text{ 中自由出现}$$

$$Q3a \quad (\forall x \alpha \rightarrow \beta) \vdash \exists x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \beta \text{ 中自由出现}$$

$$Q3b \quad (\exists x \alpha \rightarrow \beta) \vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{如果 } x \text{ 不在 } \beta \text{ 中自由出现}$$

# 前束范式

证明.

对公式  $\alpha$  归纳证明:

- 若  $\alpha$  是原子公式
- 若  $\alpha = \neg\beta$
- 若  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$
- 若  $\alpha = \forall x\beta$

# 一阶逻辑语言的语义

$$\forall x(Nx \rightarrow Ix \rightarrow \neg \forall y(Ny \rightarrow Iy \rightarrow \neg x < y))$$

# 回顾命题逻辑的语义

## 命题逻辑的语义：

- 命题符号的语义由真值指派给出： $v : \mathcal{A} \rightarrow 2$
- 命题（公式）的语义  $\bar{v} : \mathcal{F} \rightarrow 2$  取决于命题符号的语义、命题联词（逻辑符号）的语义及其自身构造
- 而命题联词的语义体现于  $v \rightarrow \bar{v}$  的扩张，不依赖于特定的语义解释  $v$

# 一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号（逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号（参数符号）：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

# 一阶逻辑的语义

## 需要特殊处理的符号

- 变元
  - 约束出现的变元
  - 自由出现的变元



# 一阶逻辑的语义

对参数符号的解释——结构

## 定义 (结构)

$\mathcal{L}$  是一阶语言, 一个  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$  是一个以  $\mathcal{L}$  中 **参数符号** 集为定义域的函数并满足:

- $\mathfrak{A}(\forall)$  是一个 **非空** 集合, 记  $|\mathfrak{A}|$ , 称作  $\mathfrak{A}$  的 **论域**
- 对  $n$  元谓词符号  $P$ ,  $\mathfrak{A}(P)$  记作  $P^{\mathfrak{A}}$ ,  $P^{\mathfrak{A}} \subset |\mathfrak{A}|^n$
- 对  $n$  元函数符号  $f$ ,  $\mathfrak{A}(f)$  记作  $f^{\mathfrak{A}}$ ,  $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \rightarrow |\mathfrak{A}|$
- 对常数符号  $c$ ,  $\mathfrak{A}(c)$  记作  $c^{\mathfrak{A}}$ ,  $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$

# 一阶逻辑的语义

## 约定

考虑语言  $\mathcal{L} = \{P_1, \dots, P_n, f_1, \dots, f_m, c_1, \dots, c_k\}$ 。我们常把一个  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$  记作  $(|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_k^{\mathfrak{A}})$

# 一阶逻辑的语义

## 例

给定语言  $\mathcal{L} = \{R\}$ ,  $R$  是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$  和  $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$  的意思是?

若令  $\mathfrak{A}$  是一个  $\mathcal{L}$ -结构, 且  $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$ ,  $R^{\mathfrak{A}}$  是  $\mathbb{N}$  上的大于等于关系  $\geq_{\mathbb{N}}$ , 那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$  是小于关系  $<_{\mathbb{N}}$  呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  呢?

# 一阶逻辑的语义

对变元的解释——赋值

定义 (赋值)

给定语言  $\mathcal{L}$  以及  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$ 。我们称  $s$  是一个  $\mathfrak{A}$ -赋值，当且仅当  $s$  是从所有变元的集合  $\mathcal{V}$  到  $|\mathfrak{A}|$  的函数  $s : \mathcal{V} \rightarrow |\mathfrak{A}|$

# 一阶逻辑的语义

## 对项的解释

### 定义 (项的赋值)

给定语言  $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$ 。令  $s$  是一个  $\mathfrak{A}$ -赋值, 我们递归定义对项的解释  $\bar{s} : \mathcal{T} \rightarrow |\mathfrak{A}|$  如下:

- 对每个变元符号  $x$ ,  $\bar{s}(x) = s(x)$ ;
- 对每个常数符号  $c$ ,  $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- 如果  $t_1, \dots, t_n$  是项,  $f$  是一个  $n$  元函数符号, 则

$$\bar{s}(f t_1 \dots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$$

# 一阶逻辑的语义

## 对公式的解释

### 定义 (满足关系)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。令  $\mathfrak{A}$  是一个  $\mathcal{L}$ -结构,  $s$  是一个  $\mathfrak{A}$ -赋值,  $\alpha$  是一个  $\mathcal{L}$  公式, 我们对  $\alpha$  递归定义  $\mathfrak{A}$  和  $s$  满足  $\alpha$  (记  $(\mathfrak{A}, s) \models \alpha$ ) 如下

- $\alpha$  是原子公式

- $(\mathfrak{A}, s) \models t_1 \approx t_2$  , 当且仅当  $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

- $(\mathfrak{A}, s) \models Pt_1 \dots t_n$  , 当且仅当  $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

# 一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$  , 当且仅当  $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \rightarrow \gamma$  , 当且仅当或者  $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$  或者  $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$  , 当且仅当对任何  $d \in |\mathfrak{A}|$ , 有  $(\mathfrak{A}, s_d^x) \models \beta$

其中  $s_d^x$  是通过对  $s$  改造得到的  $\mathfrak{A}$ -赋值:

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

# 一阶逻辑的语义

## 例

令语言  $\mathcal{L} = \{\leq\}$ , 令  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$ 。其中,  $\leq^{\mathbb{N}}$  是自然数上通常的小于等于关系。考虑

$$(\mathfrak{N}, s) \models \forall v_1 v_0 \leq v_1$$

其中,  $s(v_0) = 0$ ,  $s(v_1) = 2$



# 一阶逻辑的语义

## 引理 (合同引理)

给定语言  $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$ 。任给  $\mathfrak{A}$ -赋值  $s_1, s_2$ 。如果它们关于在公式  $\varphi$  中 **自由出现** 的变元的赋值相同, 那么  $(\mathfrak{A}, s_1) \models \varphi$  当且仅当  $(\mathfrak{A}, s_2) \models \varphi$

证明.

- 对项  $t$  归纳证明:  $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$
- 对公式  $\varphi$  归纳证明引理

# 一阶逻辑的语义

## 约定

- 我们用  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  表示公式  $\varphi$  且预设  $\varphi$  中自由出现的变元至多有  $x_1, \dots, x_n$
- 对  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , 我们用  $\mathfrak{A} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$  表示  $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ , 其中  $s(x_i) = d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

# 一阶逻辑的语义

## 推论

给定语言  $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$ 。给定语言对任何闭语句  $\sigma$ ，或者

(1) 对所有  $\mathfrak{A}$ -赋值  $s$  都有,  $(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$ ; 或者

(2) 对所有  $\mathfrak{A}$ -赋值  $s$  都有,  $(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

## 定义 (真)

给定语言  $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{L}$ -结构、 $\mathcal{L}$  中闭语句  $\sigma$ 。我们称  $\sigma$  在  $\mathfrak{A}$  中为真，记  $\mathfrak{A} \models \sigma$ ，当且仅当 (1) 成立

# 一阶逻辑的语义

## 定义 (语义蕴含)

给定语言  $\mathcal{L}$ 。称公式集  $\Gamma$  逻辑蕴含  $\varphi$ , 记  $\Gamma \models \varphi$ , 当且仅当对任意  $\mathcal{L}$ -结构  $\mathfrak{A}$  和任意  $\mathfrak{A}$ -赋值  $s$  都有: 如果  $\mathfrak{A}$  和  $s$  满足  $\Gamma$  中所有公式 (记  $(\mathfrak{A}, s) \models \Gamma$ ), 那么  $(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

## 约定

- 以后  $\models$  依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \models \beta$  即  $\{\alpha\} \models \beta$ ;  $\alpha \models \beta$  (逻辑等效)
- $\models \alpha$  即  $\emptyset \models \alpha$  (逻辑有效)

## 习题

- 证明 (Eq3) - (Eq5) 是一阶逻辑公理系统中可证的
- 4.4.1, 4.4.2
- 5.1.8 - 5.1.12

## 下期预告

- 在结构内定义结构上的关系、函数以及结构论域中的对象
- 定义结构类