数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

前情提要

- 命题逻辑的可靠性：对任意公式集 Σ，任意公式 τ，有

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \vDash \tau$$

- 命题逻辑的完全性：对任意公式集 Σ，任意公式 τ，有

$$\Sigma \vDash \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

完全性的一个等价形式：对任意公式集 Σ，有

Σ 是一致的 $\Rightarrow$ Σ 是可满足的

前情提要

完全性定理（等价形式）的证明：

- 从一个一致的公式集 Σ 出发，构造极大一致集 Δ
- Δ 包含足够多的信息以定义真值指派 v
- v 满足 Δ，因而满足 Σ

前情提要

我们证明了，命题逻辑的希尔伯特公理系统是完全的。我们的证明哪里体现了那些公理、推理规则是足够用的?

完全性的一个构造性证明

引理 (弱形式的完全性定理)

$$\vDash \alpha \quad \Rightarrow \vdash \alpha$$

完全性的一个构造性证明

引理

假设 α 至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_k$。v 是一个真值指派。

定义

$$A_i^v = \begin{cases} A_i & 若\ v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & 否则 \end{cases}$$

类似地，若 $\bar{v}(\alpha) = 1$，则令 $\alpha^v = \alpha$；否则，$\alpha^v = \neg\alpha$。令

$\Sigma_\alpha^v = \{A_1^v, \ldots, A_k^v\}$ 那么就有

$$\Sigma_\alpha^v \vdash \alpha^v$$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

弱形式的完全性定理: $\vDash \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

证明.

假设 $\vDash \alpha$。对任意真值指派 v，都有 $\alpha^v = \alpha$。因此有，

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha$$

特别地，考虑 v_1, v_2，除了 $v_1(A_k) = 0, v_2(A_k) = 1$，其他指派都一样......

命题逻辑的紧致性定理

定理 (紧致性定理)

公式集 Σ 是可满足的，当且仅当 Σ 的每个有穷子集是可满足的

证明.

直接证明

命题逻辑的紧致性定理

(不经过完全性定理) 直接证明紧致性定理:

引理

给定公式集 Σ 和公式 α。如果公式集 Σ 是有穷可满足的，那么 $\Sigma \cup \{\alpha\}$ 或 $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ 是有穷可满足的。

- 给定公式的枚举 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。构造“极大有穷可满足”集。

紧致性定理的应用

定义

- 称二元组 (G, E) 是一个（无向） 图 （graph），当且仅当 G 是一个节点（vertice）集合，$E \subseteq G^2$ 是节点间的连线关系，E 是对称的，反自返的。
- 称 (G_0, E_0) 是 (V, E) 的 子图 ，当且仅当 $G_0 \subseteq G$ 且 $E_0 = E \cap G_0^2$

紧致性定理的应用

定理 (四色定理)

任何（可能无穷的）平面（Kuratowski's theorem）无向图可以被四种颜色染色使得相连节点被染不同的颜色

紧致性定理推论

如果一个图（可能是可数无穷的）的每个有穷子图都能用四种颜色染色且不会造成相邻节点染成同一种颜色，那么这整个图都能用四种颜色染色

因此，四色定理的“有穷”版本蕴含完整版本

紧致性定理的应用

证明.

不妨设 $G = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$，$E \subset G^2$，$(G, E)$ 是一个图。令命题符号集合

$$\mathcal{A} = \{A_i^c \mid i \in G, c \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

令 Σ 包含下列公式

1. $A_i^1 \vee A_i^2 \vee A_i^3 \vee A_i^4$ $\quad (i \in G)$
2. $A_i^c \to \neg A_i^d$ $\quad (i \in G$ 且 $c \neq d)$
3. $\neg(A_i^c \wedge A_j^c)$ $\quad$ (若 iEj)

一阶谓词逻辑

不是命题逻辑的逻辑

- If there is one ring to rule them all, then everyone is ruled by a ring
- If everyone is ruled by a ring, then there is one ring rules everyone

$$\exists x \forall y\, Rxy \to \forall y \exists x\, Rxy$$

$$\forall y \exists x\, Rxy \to \exists x \forall y\, Rxy$$

一阶逻辑的语言

符号:

- 逻辑符号
  - 括号: (,)
  - 命题联词: $\neg, \to$
  - 量词: $\forall$
  - 变元: $v_1, v_2, \ldots$

一阶逻辑的语言

符号:

- 非逻辑符号（参数符号）
  - 常数符号: $c_1, c_2, \ldots$ $(*)$
  - 函数符号: $f_1, f_2, \ldots$ $(*)$
  - 谓词符号: $P_1, P_2, \ldots$ $(*)$
  - 等词: $\approx$ （可有可无）
- $(*)$ 可以没有，也可以有无穷多
- 存在能行的函数 $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ 告诉我们每个 f_i 是 $g(i)$-元函数符号，每个 P_i 是 $h(i)$-元谓词符号

一阶逻辑的语言

各种一阶逻辑语言

- 集合论语言: $\{\approx, \in\}$
- 初等数论的语言: $\{\approx, 0, <, S, +, \cdot\}$
- 序关系的语言: $\{\approx, R\}$

我们说“给定一个一阶逻辑语言”就是规定各类参数符号的集合。

下期预告

- 一阶谓词逻辑的语言
- 自由出现与约束出现