

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

# 前情提要

# 前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$  是功能完全的  
证明: 析取范式
- 推论:  $\{\neg, \vee\}$ 、 $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \rightarrow\}$ .....都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的?

# 前情提要

我们定义了

$$\Sigma \models \tau$$

# 命题逻辑希尔伯特系统的可靠性

# 命题逻辑的可靠性

定理 ( **可靠性** 定理)

令  $\Sigma$  是一个公式集,  $\tau$  是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \vDash \tau$$

特别地, 若  $\vdash \tau$ , 则  $\vDash \tau$

# 命题逻辑的可靠性

证明.

假设  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  见证  $\Sigma \vdash \tau$ . 对  $1 \leq i \leq n$  归纳证明:  $\Sigma \vDash \beta_i$

情形 1 若  $\beta_i$  是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情形 2 若  $\beta_i \in \Sigma$ . 由定义, 平凡

情形 3 若存在  $j, k < i$ ,  $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$ . 借助归纳假设

# 命题逻辑希尔伯特系统的完全性



# 命题逻辑的完全性

定理 ( 完全性 定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点: 对每组符合条件的  $\Sigma, \tau$  构造一个见证  $\Sigma \vdash \tau$  的推演序列
- 窍门: 证明,  $\Sigma \not\models \tau \Rightarrow \Sigma \not\vdash \tau$

# 命题逻辑的完全性

## 定义

称公式集  $\Sigma$  是 **不一致的** (inconsistent), 如果存在某个公式  $\alpha$  使得  $\Sigma \vdash \alpha$  且  $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称  $\Sigma$  是 **一致的**, 当且仅当它不是不一致的

# 命题逻辑的完全性

## 定义

- 称公式集  $\Sigma$  是可满足的 (satisfiable), 当且仅当存在一个真值指派满足  $\Sigma$  中所有公式
- 称  $\Sigma$  是不可满足的, 当且仅当它不是可满足的

注意: 可满足是语义概念

# 命题逻辑的完全性

## 引理

下列命题等价

- (1) 如果  $\Sigma \models \tau$ , 则  $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果  $\Sigma$  一致, 则  $\Sigma$  可满足

证明.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

(2)  $\Rightarrow$  (1)

# 命题逻辑的完全性

## 引理

下列命题等价

- (1) 如果  $\Sigma \models \tau$ , 则  $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果  $\Sigma$  一致, 则  $\Sigma$  可满足

证明.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

(2)  $\Rightarrow$  (1)

# 命题逻辑的完全性

## 引理

下列命题等价

- (1) 如果  $\Sigma \models \tau$ , 则  $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果  $\Sigma$  一致, 则  $\Sigma$  可满足

证明.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

(2)  $\Rightarrow$  (1)

# 命题逻辑的完全性

## 引理

下列命题等价

- (1) 如果  $\Sigma \models \tau$ , 则  $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果  $\Sigma$  一致, 则  $\Sigma$  可满足

证明.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

(2)  $\Rightarrow$  (1)

# 命题逻辑的完全性

## 引理

下列命题等价

- (1) 如果  $\Sigma \models \tau$ , 则  $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果  $\Sigma$  一致, 则  $\Sigma$  可满足

证明.

(1)  $\Rightarrow$  (2)

(2)  $\Rightarrow$  (1)



# 命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

# 命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

## 定义

称公式集  $\Delta$  是 **极大一致的**，当且仅当  $\Delta$  是一致的，且  $\Delta$  的任何真扩张都不是一致的

# 命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

## 定义

称公式集  $\Delta$  是 **极大一致的**，当且仅当  $\Delta$  是一致的，且  $\Delta$  的任何真扩张都不是一致的

# 命题逻辑的完全性

## 引理

- 假设  $\Delta$  是极大一致集, 那么
  - 对任意公式  $\alpha$ , 若  $\Delta \vdash \alpha$ , 则  $\alpha \in \Delta$
  - 对任意公式  $\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$  或  $\neg\alpha \in \Delta$
- 任何极大一致集  $\Delta$  都是可满足的。

# 命题逻辑的完全性

## 引理

每个一致公式集  $\Sigma$  都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集:  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  (为什么可以?)
- 依照上述枚举递归定义公式集序列  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验, 保持  $\Delta_n$  是一致的
- 令  $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$ . 为什么  $\Delta$  是一致的? 极大的?

# 命题逻辑的完全性

我们证明了，命题逻辑的希尔伯特公理系统是完全的。我们的证明哪里体现了那些公理、推理规则是足够用的？

# 下期预告

- 完全性定理的构造性证明
- 命题逻辑的紧致性
- 一阶谓词逻辑的语言

# 习题

- 2.8.4, 2.8.5
- 我们称公式集  $\Sigma$  是 **完全的**，当且仅当对任意公式  $\alpha$  或者  $\alpha \in \Sigma$  或者  $(\neg\alpha) \in \Sigma$ 。  
证明：假设  $\Sigma$  的每个有穷子集可满足，那么存在完全的  $\Gamma \supset \Sigma$  且  $\Gamma$  的每个有穷子集可满足  
(\* 不引用命题逻辑完全性定理而直接证明命题逻辑紧致性定理)



# 下期预告

- 完全性定理的一个构造性证明
- 紧致性定理及其应用