

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的
证明: 析取范式
- 推论: $\{\neg, \vee\}$ 、 $\{\neg, \wedge\}$ 、 $\{\neg, \rightarrow\}$都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的?

前情提要

我们定义了

$$\Sigma \models \tau$$

命题逻辑希尔伯特系统的可靠性

命题逻辑的可靠性

定理 (可靠性 定理)

令 Σ 是一个公式集, τ 是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \vDash \tau$$

特别地, 若 $\vdash \tau$, 则 $\vDash \tau$

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$. 对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明: $\Sigma \vDash \beta_i$

情形 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情形 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义, 平凡

情形 3 若存在 $j, k < i$, $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑希尔伯特系统的完全性

命题逻辑的完全性

定理 (完全性 定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点: 对每组符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门: 证明, $\Sigma \not\models \tau \Rightarrow \Sigma \not\vdash \tau$

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是 **不一致的** (inconsistent), 如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 **一致的**, 当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是可满足的 (satisfiable), 当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是不可满足的, 当且仅当它不是可满足的

注意: 可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

- (1) 如果 $\Sigma \models \tau$, 则 $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果 Σ 一致, 则 Σ 可满足

证明.

(1) \Rightarrow (2)

(2) \Rightarrow (1)

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

- (1) 如果 $\Sigma \models \tau$, 则 $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果 Σ 一致, 则 Σ 可满足

证明.

(1) \Rightarrow (2)

(2) \Rightarrow (1)

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

- (1) 如果 $\Sigma \models \tau$, 则 $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果 Σ 一致, 则 Σ 可满足

证明.

(1) \Rightarrow (2)

(2) \Rightarrow (1)

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

- (1) 如果 $\Sigma \models \tau$, 则 $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果 Σ 一致, 则 Σ 可满足

证明.

(1) \Rightarrow (2)

(2) \Rightarrow (1)

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

- (1) 如果 $\Sigma \models \tau$, 则 $\Sigma \vdash \tau$
- (2) 如果 Σ 一致, 则 Σ 可满足

证明.

(1) \Rightarrow (2)

(2) \Rightarrow (1)

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

定义

称公式集 Δ 是 **极大一致的**，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派？

定义

称公式集 Δ 是 **极大一致的**，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

命题逻辑的完全性

引理

- 假设 Δ 是极大一致集, 那么
 - 对任意公式 α , 若 $\Delta \vdash \alpha$, 则 $\alpha \in \Delta$
 - 对任意公式 α , $\alpha \in \Delta$ 或 $\neg\alpha \in \Delta$
- 任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集: $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ (为什么可以?)
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验, 保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$. 为什么 Δ 是一致的? 极大的?

命题逻辑的完全性

我们证明了，命题逻辑的希尔伯特公理系统是完全的。我们的证明哪里体现了那些公理、推理规则是足够用的？

下期预告

- 完全性定理的构造性证明
- 命题逻辑的紧致性
- 一阶谓词逻辑的语言

习题

- 2.8.4, 2.8.5
- 我们称公式集 Σ 是 **完全的**，当且仅当对任意公式 α 或者 $\alpha \in \Sigma$ 或者 $(\neg\alpha) \in \Sigma$ 。
证明：假设 Σ 的每个有穷子集可满足，那么存在完全的 $\Gamma \supset \Sigma$ 且 Γ 的每个有穷子集可满足
(* 不引用命题逻辑完全性定理而直接证明命题逻辑紧致性定理)

下期预告

- 完全性定理的一个构造性证明
- 紧致性定理及其应用