数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语言
  - 命题逻辑公式的唯一可读性
- 经典命题逻辑的希尔伯特系统
  - 公理（模式）
  - 分离规则
  - 证明 / 演绎（序列）

命题逻辑的语义

命题逻辑的语义

命题逻辑中，命题是语义的最小载体。且经典命题逻辑只关心“真”、“假”

定义 (真值指派)

我们说 v 是一个 真值指派 ，当且仅当 v 是以由命题符号组成的集合 $\mathcal{A}$ 为定义域、以真值集合 $\{0,1\}$ 为值域的函数

$v : \mathcal{A} \to \{0,1\}$

命题逻辑的语义

命题逻辑中，命题是语义的最小载体。且经典命题逻辑只关心“真”、“假”

定义 (真值指派)

我们说 v 是一个 真值指派 ，当且仅当 v 是以由命题符号组成的集合 $\mathcal{A}$ 为定义域、以真值集合 $\{0, 1\}$ 为值域的函数 $v : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v} : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$

0. 对 $A \in \mathcal{A}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β,

$$\bar{v}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v} : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$

0. 对 $A \in \mathcal{A}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β,

$$\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v} : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$

0. 对 $A \in \mathcal{A}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β,

$$\bar{v}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 或者 } \bar{v}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v}: \mathcal{F} \to \{0,1\}$

0. 对 $A \in \mathcal{A}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β，

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v，我们定义 v 的扩展 $\bar{v} : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$

0. 对 $A \in \mathcal{A}$，$\bar{v}(A) = v(A)$
1. 对任意公式 α, β,

$$\bar{v}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta) \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

注意：

- 对 $\bar{v}$ 的定义是一个递归定义
  - 它告诉我们，给定一个真值指派，如何计算一个具体公式的真值

命题联词

我们对诸命题联词的语义解释，就体现在对“如何从 v 得到 $\bar{v}$ ”的定义。

例如：

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题联词

我们对诸命题联词的语义解释，就体现在对“如何从 v 得到 $\bar{v}$ ”的定义。

例如：

$$\bar{v}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题联词

或用真值表表示:

$\bar{v}(\alpha)$	$\bar{v}(\beta)$	$\bar{v}(\alpha \to \beta)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

命题联词

或用真值表表示:

x	y	$B_{\to}(x,y)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

命题联词

我们赋予二元联词 $\rightarrow$ 的意义就是一个二元函数:

$$B_{\rightarrow}:\{0,1\}^2\rightarrow\{0,1\}$$

而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg}:\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$$

我们称这种以 $\{0,1\}$（或其任意 n 维卡氏积）为定义域和值域的函数为 布尔函数

命题联词

我们赋予二元联词 $\to$ 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\to} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$$

而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0,1\} \to \{0,1\}$$

我们称这种以 $\{0,1\}$（或其任意 n 维卡氏积）为定义域和值域的函数为 布尔函数

命题联词

我们赋予二元联词 $\rightarrow$ 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\rightarrow}: \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$$

而赋予一元联词 $\neg$ 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg}: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

我们称这种以 $\{0,1\}$（或其任意 n 维卡氏积）为定义域和值域的函数为 布尔函数

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题:

- 有多少种不同意义的一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种 n 元联词?

命题联词

问题:

- 有多少种一元布尔函数?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种 n 元联词?

命题联词

问题:

- 有多少种一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种 n 元联词?

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词?
- 有多少种二元联词?
- 有多少种 n 元联词?

命题联词

命题联词的合成

x	y	$B_\neg(x)$	$B_\vee(x,y)$	$B_\top(x)$	$B_\downarrow(x,y)$
1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0		1		0
0	0		0		1

则 $B_\top(x) = B_\vee(B_\neg(x), x)$，而 $B_\downarrow(x,y) = B_\neg(B_\vee(x,y))$

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_n$ 的合式公式，那么 α 就决定了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$v(A_1), \ldots, v(A_n)$		$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \ldots, v_1(A_n)$	$= 1, \ldots, 1$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$v_{2^n}(A_1), \ldots, v_{2^n}(A_n)$	$= 0, \ldots, 0$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_n$ 的合式公式，那么 α 就决定了一个 n 元布尔函数 $B^n_\alpha : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$v(A_1), \ldots, v(A_n)$	$x_1, \ldots, x_n$	$B^n_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \ldots, v_1(A_n)$	$= 1, \ldots, 1$	$B^n_\alpha(1, \ldots, 1) =$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$v_{2^n}(A_1), \ldots, v_{2^n}(A_n)$	$= 0, \ldots, 0$	$B^n_\alpha(0, \ldots, 0) =$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

命题联词

定义

令 α 是至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_n$ 的公式。定义函数 $B^n_\alpha : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$，使得

$$B^n_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \bar{v}(\alpha)$$

其中，$v(A_i) = x_i \quad (1 \leq i \leq n)$

命题联词

一个命题逻辑公式 α 在意义上等同于 $\star(A_1, \ldots, A_n)$，其中 $\star$ 是某个 n 元命题联词。

问题：是否对每个 n 元命题联词，我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式？即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 是否够用？也即，是否只用 $B_\neg$、$B_\wedge$、$B_\vee$、$B_\rightarrow$ 和 $B_\leftrightarrow$ 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数？

命题联词

一个命题逻辑公式 α 在意义上等同于 $\star(A_1, \ldots, A_n)$，其中 $\star$ 是某个 n 元命题联词。

问题: 是否对每个 n 元命题联词，我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式？即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 是否够用？

也即，是否只用 $B_\neg$、$B_\wedge$、$B_\vee$、$B_\rightarrow$ 和 $B_\leftrightarrow$ 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数？

命题联词

一个命题逻辑公式 α 在意义上等同于 $\star(A_1, \ldots, A_n)$，其中 $\star$ 是某个 n 元命题联词。

问题: 是否对每个 n 元命题联词，我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式? 即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 是否够用? 也即，是否只用 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、$B_{\vee}$、$B_{\rightarrow}$ 和 $B_{\leftrightarrow}$ 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数?

定理

对任意 n 元布尔函数 $G:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$（$n \geq 1$），都存在一个命题逻辑合式公式 α，使得 $B_\alpha^n = G$

命题联词

例:

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\begin{aligned}\alpha = \quad & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)\end{aligned}$$

检验: $M = B_\alpha^3$

命题联词

例:

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\begin{aligned}\alpha = \quad & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)\end{aligned}$$

检验: $M = B^3_\alpha$

命题联词

例:

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\begin{aligned}\alpha = \quad & (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3) \\ & \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)\end{aligned}$$

检验: $M = B_{\alpha}^{3}$

证明.

对一般情况的证明

命题联词

定义

称一组联词（布尔函数）C 是功能完全的，如果任意 n 元布尔函数（$n \geq 1$）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

例：

- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}, B_{\vee}\}$，由上述证明（为什么?）
- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}\}$，因为 $B_{\vee}(x,y) = B_{\neg}\Big(B_{\wedge}(B_{\neg}(x), B_{\neg}(y))\Big)$

...

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_\wedge, B_\rightarrow\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_\wedge, B_\to\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_{\neg}$、$B_{\wedge}$、或 $B_{\vee}$
- 寻找，例如 $B_{\neg}$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_\wedge, B_\to\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的?

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 $B_\neg$、$B_\wedge$、或 $B_\vee$
- 寻找，例如 $B_\neg$ 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例: $\{B_\wedge, B_\rightarrow\}$

命题逻辑的语义（续）

定义

- 称一个真值指派 v **满足** 一个公式 α，如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ **重言蕴含** 公式 τ（$\Sigma \vDash \tau$），若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 **重言式**，当且仅当 $\emptyset \vDash \tau$（又记 $\vDash \tau$）
- 称公式 σ 和 τ **重言等价**，当且仅当 $\{\sigma\} \vDash \tau$（又记 $\sigma \vDash \tau$）且 $\tau \vDash \sigma$

命题逻辑的语义（续）

容易验证

- 公式 α（至多含 $A_1, \ldots, A_n$）是重言式，当且仅当 B^n_α 是值为 1 的常函数
- 公式 σ 和 τ（至多含 $A_1, \ldots, A_n$）重言等价，当且仅当

$$B^n_\sigma = B^n_\tau$$

习题

- 2.3.9, 2.3.10
- 2.5.1, 2.5.3（有关定义见讲义 2.5 节），2.5.7*, 2.5.8*

下期预告

命题逻辑希尔伯特系统的可靠性与完全性