

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语言
 - 符号 (S): 命题符号 (\mathcal{A}), 联词, 辅助符号
 - 表达式 (\mathcal{E})
 - 合式公式 (\mathcal{F})
- 合式公式的递归定义与归纳证明
- 命题逻辑公式的唯一可读性

经典命题逻辑的希尔伯特系统

真即被证明

——数学直觉主义

什么是证明

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 公式的简写

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- α, β, γ 是元语言符号, 指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 因此，有无穷条公理。

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 但我们能机械地判定一个表达式是不是公理 (why?)

希尔伯特系统的推理规则

分离规则 (*modus ponens*, MP):

从 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的证明

定义 (推演/证明/演绎 (deduction))

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个 **推演** (或 **证明** 或 **演绎**) 是一个 **有穷的公式序列** $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, 满足 $\alpha_n = \varphi$, 并且对所有 $i \leq n$, 或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$; 或者

(b) 存在 $j, k < i$, 使得 $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$

希尔伯特系统的证明

定义

- 称 α 是 Γ 的一个 **定理** 或 **内定理** (记 $\Gamma \vdash \alpha$), 当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$, 当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

事实

Σ 、 Γ 是公式集, α 是公式

- 如果 $\Gamma \subset \Sigma$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$, 则 $\Sigma \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0 , 有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$
- 如果 $\Sigma \vdash \alpha$ 并且对任意 $\beta \in \Sigma$ 有 $\Gamma \vdash \beta$, 那么 $\Gamma \vdash \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

$$1 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$2 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$3 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$4 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$5 \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

$$1 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$2 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$3 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$4 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$5 \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

推论

对任意公式 α, β 和 γ , 有

- $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
- $\{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

证明.

利用演绎定理

一些元定理

定义

称公式集 Σ 是 **不一致的** (inconsistent), 如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 **一致的**, 当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

注意:

“不一致”是个断言“存在证明”的性质,“一致”相反

引理

- Σ 是不一致的, 当且仅当对任意公式 β 有, $\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$, 当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

习题

- (*) 描述一个计算机程序：输入任何表达式，该程序能判断该表达式是否是合式公式（书中习题 2.4.1）以及是否是 (A1)、(A2) 或 (A3)
- 2.4.4*
- 2.6.1, 2.6.2
- 2.8.2

下期预告

- 命题逻辑的语义：真值指派
- 命题联词的语义与布尔函数