

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

- 自然数上的归纳法与递归定义
- 函数
- 枚举与集合大小

命题逻辑

命题逻辑

回顾: 我们之前假设, 如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假, 我们应该也能谈论命题 “并非 A ” 和 “ A 并且 B ” 的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题, 如: “并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段 (热身)

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 无穷可枚举多个命题符号： A_0, A_1, A_2, \dots

定义 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots\}$

- 联词： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- 辅助符号： $(,)$

定义 $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \}$

注意：符号是任意指定的数学对象，可以是自然数或集合，满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义

命题逻辑的语言

定义 (表达式 (expression))

我们称由命题逻辑符号 (即 S 中元素) 组成的有穷长度的符号序列 (即符号串) 为命题逻辑语言的 **表达式**。定义

$$\mathcal{E} = \{s \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 使得 } s : n \rightarrow S\}$$

即所有表达式组成的集合。

命题逻辑的语言

约定

我们用, 例如, $(A_0 \vee A_1)$ 作为序列 $\langle (, A_0, \vee, A_1,) \rangle$ 的缩写。
而 A_i 作为表达式是 $\langle A_i \rangle$ 的缩写。根据语境, 当我们说“命题变元 A_i ”时, 我们可能指的是表达式 $\langle A_i \rangle$

例 (表达式)

- $(A_0 \vee A_1)$
- $(A_0 \vee$

注意: 不是所有表达式都能构成合乎语法规则的命题

命题逻辑的语言

定义 (合式公式 (well-founded formula))

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式, 那么
 $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

约定

- 任给两个有穷序列 s, t , 我们用 $s * t$ 表示它们的连接
- 我们用, 如 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 表示 $\langle \langle \rangle * \alpha * \langle \rightarrow \rangle * \beta * \langle \rangle \rangle$

关于合式公式的定义

- 元语言与对象语言
- 上述定义是一种递归定义

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义

- 自上而下

$$\mathcal{F}^* = \bigcap \{X \mid X \text{ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭}\}$$

- 自下而上

- $F_0 = \{A_0, A_1, \dots\}$

- $F_{n+1} = F_n \cup \{(\neg\alpha) \mid \alpha \in F_n\}$

$$\cup \{(\alpha \star \beta) \mid \alpha, \beta \in F_n \text{ 且 } \star = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

- $\mathcal{F}_* = \bigcup_n F_n$

命题逻辑的语言

事实

$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$ (证明稍后)

记法

令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$

- 自下而上定义的好处在于展现了每个合式公式的构造过程
- 自上而下的定义告诉我们可以运用归纳原理

命题逻辑的语言

当我们要证明诸如“所有合式公式都有某性质”时，我们往往要运用：

定理 (关于命题逻辑合式公式的归纳原理)

令 P 是一个关于合适公式的性质。若下述 (1)、(2) 成立，则所有合适公式 α 都有 P 性质，记 $P(\alpha)$

- (1) 对所有命题符号 A_i , $P(A_i)$
- (2) 对所有合式公式 α, β , 若 $P(\alpha)$ 且 $P(\beta)$, 则 $P((\neg\alpha))$ 且 $P(\alpha \star \beta)$ (注: \star 可以是 $\vee, \wedge, \rightarrow$ 或 \leftrightarrow)

命题逻辑的语言

关于命题逻辑合式公式的归纳原理（定理）来源于自然数上的归纳原理。

取自然数的性质 P' 为： $P'(n)$ ，当且仅当所有 F_n 中的公式 α 有 $P(\alpha)$ ，关于合式公式的归纳原理就成了自然数上的归纳原理的一个特例。

证明： $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$

命题逻辑的语言

归纳原理的一个应用

定理

- 每个合式公式中左右括号的数目相同。且每一合式公式非空 **真前段** 中左括号多于右括号。因此，合式公式的真前段一定不是合式公式。
- 没有合式公式是以 \neg 开头的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α , 下列叙述有且仅有一条适用

- (1) α 是一个命题符号。
- (2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。
- (3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式, \star 为某个二元联词。

不仅如此, 在情形 (2) 和 (3) 中, 公式 α_0 , α_1 和 α_2 还有二元联词 \star 都是唯一的。

习题

- 令 $s : n \rightarrow \mathcal{A}$ 、 $t : m \rightarrow \mathcal{A}$ ，尝试给出两个有穷序列的连接 $s * t$ 的定义
- 2.2.5 (给出证明)、2.2.8 (构造序列定义见教材)、2.2.9

下期预告

经典命题逻辑的希尔伯特公理系统