数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

- 关系上的运算：定义域、值域、像、逆像、逆、复合、延拓与限制
- 等价关系与划分
- n 元有序组、n 维卡氏积，n 元关系

自然数上的归纳法

定理

以下命题等价：

1. 自然数集 $\mathbb{N}$ 的任何非空子集有最小元
2. 对任何 $P \subset \mathbb{N}$，若 $0 \in P$ 且任何自然数 $n \in P$ 都蕴含 $n+1 \in P$，则 $P = \mathbb{N}$
3. 对任何 $P \subset \mathbb{N}$，若任何自然数 n 都满足“若任何 $m < n$ 都有 $m \in P$，则 $n \in P$”，则 $P = \mathbb{N}$

函数

定义

考虑关系 $f \subset X \times Y$。如果 f 满足：对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ 都有 $y_1 = y_2$，那么我们称 f 是一个 函数 。

记法

- 若 f 是一个函数，我们将 $(x, y) \in f$ 记作 $f(x) = y$ 或 $f : x \mapsto y$ ，并称 f 在 x 处的值是 y
- 当 $\operatorname{dom} f = X$ 且 $\operatorname{ran} f \subset Y$ 时，我们称 f 是 X 到 Y 的 函数 ，记作 $f : X \to Y$

例

- 集合 X 上等于关系 $\{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$ 是一个函数，即 等同函数 ，记作 Id_X

函数

定理

函数 $f = g$，当且仅当 $\operatorname{dom} f = \operatorname{dom} g$ 并且对任意 $x \in \operatorname{dom} f$，$f(x) = g(x)$

因此，我们可以通过给出一个函数 f 的定义域 $\operatorname{dom}(f)$ 以及 f 在定义域中每个 x 处的值来定义一个函数

例

- $\operatorname{dom}(s) =$ 选课的学生，对选课学生 x，$s(x) = x$ 的成绩
- $\operatorname{dom}(p) = \mathbb{N}$，$p(n) =$ 第 n 个素数

函数

记法 (n 元函数)

- 考虑 $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$。$f$ 是 $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y$ 上的一个 $n+1$ 元关系。我们将 $(x_1, \ldots, x_n, y) \in f$ 记作 $f(x_1, \ldots, x_n) = y$
- $f : X^n \to X$ 常被称作 X 上的 n 元运算

例

自然数上的乘法是一个从 $\mathbb{N}^2$ 到 $\mathbb{N}$ 的 2 元函数 / 运算

函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

定理

如果 f 和 g 是函数，那么 $g \circ f$ 也是函数。它的定义域 $\mathrm{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\mathrm{dom}(g)]$。并且，对所有 $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$ 有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意: 函数的逆未必是函数。

函数

事实

给定函数 $f : X \to Y$，A 是 X 的子集。则 $g = f\restriction A$ 也是一个函数。

此时，我们称 g 是 f 到 A 上的限制，而 f 是 g 的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下，我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

函数

定义

一些函数的性质

- 函数 $f : X \to Y$ 是 一一的 或 单射，如果对任意 $x_1, x_2 \in X$ 都有 $x_1 \neq x_2$ 蕴含 $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 函数 $f : X \to Y$ 是 满射，如果 $\mathrm{ran}(f) = Y$
- 函数 $f : X \to Y$ 是 双射 或 一一对应，如果它既是单射又是满射

记法 (序列)

令 I 是一个（下标）集合，$s : I \to X$ 是一个函数，我们又称 s 是一个 序列 。对 $i \in I$，记 $s_i = s(i)$，记 $s = \langle s_i \ : \ i \in I \rangle$

例

- 素数序列

  $$p = \langle p_n \ : \ n \in \mathbb{N} \rangle = \langle p_0, p_1, \ldots, \rangle = \langle 2, 3, 5, 7, \ldots \rangle$$

枚举与集合大小

约定

我们将集合 $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 记作 n

因此，对自然数 n, m 来说，$m \in n$ 当且仅当 $m < n$

枚举与集合大小

定义

如果下标集 $I \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$，$e : I \to X$ 是一个满射，我们称 e 是对集合 X 的一个 枚举 。

注意:

- 以自然数或自然数集为下标集的序列都是对它值域的一个枚举
- 枚举可以是有穷的，也可以是无穷的
- 一个集合可以有许多枚举

枚举与集合大小

例

- 空集 $\emptyset$ 是一个序列，也是一个对 $\emptyset$ 的枚举
- $\langle a, b, b, c\rangle$
- $\langle a, c, b\rangle$
- $\langle a, b, c, c, c, \ldots\rangle$

枚举与集合大小

事实

如果存在一个对集合 X 的枚举，那么就存在一个对 X 的一一的枚举

定义

- 我们称一个集合 X 是 可枚举的 / 可数的 ，当且仅当存在一个对 X 的枚举
- 我们称一个集合 X 是 有穷的，当且仅当存在自然数 n 以及对 X 的枚举 $e : n \to X$

枚举与集合大小

例

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}^+$,
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{Z}$：考虑 $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$：Cantor's zig-zag method

枚举与集合大小

Cantor's zig-zag method

$$f(n, m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

事实

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是双射（习题 *）

我们称这样的双射是一个 对函数 （pairing function）

枚举与集合大小

例 (对函数)

- $g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$
- $$h(n, m) = \begin{cases} m^2 + n - 1, & \text{if 若} n < m \\ n^2 + n + m, & \text{否则.} \end{cases}$$

枚举与集合大小

例 (不可数的集合)

- $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to 2\}$
- $P(\mathbb{N})$
- $\mathbb{R}$

康托尔对角线法

枚举与集合大小

定义

我们称集合 X 和集合 Y 等数，记 $|X| = |Y|$，当且仅当存在双射 $h : X \to Y$

事实

集合等数是一个等价关系

枚举与集合大小

定义

- 我们称 集合 X 不比集合 Y 大，记 $|X| \leq |Y|$，当且仅当存在单射 $f : X \to Y$
- 我们称 集合 X 比集合 Y 小，记 $|X| < |Y|$，当且仅当 $|X| \leq |Y|$ 且 $|X| \neq |Y|$。

枚举与集合大小

定理 (Cantor-Bernstein)

对任意集合 X, Y，若 $|X| \leq |Y|$ 且 $|Y| \leq |X|$，则 $|X| = |Y|$

事实

$|n| < |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$

习题

- 1.4.1、1.4.5 (1), (3)、1.4.6、1.4.7、1.4.12*
- 1.5.6
- 利用皮亚诺公理和加法定义（书 23 页）证明加法交换律，即对任意自然数 n, m

$$n + m = m + n$$

（下页还有）

习题

- 对任意 n，任给 $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$。$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle = \langle y_0, \ldots, y_n \rangle$ 当且仅当对每个 $i \leq n$ 都有 $x_i = y_i$
- 如果集合 X 和集合 Y 等数且 X 是可数的，那么 Y 也是可数的

下期预告

- 命题逻辑的语言