

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

# 前情提要

- 关系上的运算：定义域、值域、像、逆像、逆、复合、延拓与限制
- 等价关系与划分
- $n$  元有序组、 $n$  维卡氏积,  $n$  元关系

# 自然数上的归纳法

## 定理

以下命题等价:

- 1 自然数集  $\mathbb{N}$  的任何非空子集有最小元
- 2 对任何  $P \subset \mathbb{N}$ , 若  $0 \in P$  且任何自然数  $n \in P$  都蕴含  $n + 1 \in P$ , 则  $P = \mathbb{N}$
- 3 对任何  $P \subset \mathbb{N}$ , 若任何自然数  $n$  都满足 “若任何  $m < n$  都有  $m \in P$ , 则  $n \in P$ ”, 则  $P = \mathbb{N}$

# 自然数上的归纳法

## 定理

以下命题等价:

- 1 自然数集  $\mathbb{N}$  的任何非空子集有最小元
- 2 对任何  $P \subset \mathbb{N}$ , 若  $0 \in P$  且任何自然数  $n \in P$  都蕴含  $n+1 \in P$ , 则  $P = \mathbb{N}$
- 3 对任何  $P \subset \mathbb{N}$ , 若任何自然数  $n$  都满足 “若任何  $m < n$  都有  $m \in P$ , 则  $n \in P$ ”, 则  $P = \mathbb{N}$

# 函数

## 定义

考虑关系  $f \subset X \times Y$ 。如果  $f$  满足：对任意  $(x, y_1), (x, y_2) \in f$  都有  $y_1 = y_2$ ，那么我们称  $f$  是一个 **函数**。

## 记法

- 若  $f$  是一个函数，我们将  $(x, y) \in f$  记作  $f(x) = y$  或  $f: x \mapsto y$ ，并称  $f$  在  $x$  处的值是  $y$
- 当  $\text{dom } f = X$  且  $\text{ran } f \subset Y$  时，我们称  $f$  是  $X$  到  $Y$  的 **函数**，记作  $f: X \rightarrow Y$

# 函数

## 例

- 集合  $X$  上等于关系  $\{(x, y) \in X^2 \mid x = y\}$  是一个函数, 即 **等同函数**, 记作  $\text{Id}_X$

# 函数

## 定理

函数  $f = g$ , 当且仅当  $\text{dom } f = \text{dom } g$  并且对任意  $x \in \text{dom } f$ ,  $f(x) = g(x)$

因此, 我们可以通过给出一个函数  $f$  的定义域  $\text{dom}(f)$  以及  $f$  在定义域中每个  $x$  处的值来定义一个函数

## 例

- $\text{dom}(s) =$  选课的学生, 对选课学生  $x$ ,  $s(x) = x$  的成绩
- $\text{dom}(p) = \mathbb{N}$ ,  $p(n) =$  第  $n$  个素数

# 函数

## 定理

函数  $f = g$ , 当且仅当  $\text{dom } f = \text{dom } g$  并且对任意  $x \in \text{dom } f$ ,  $f(x) = g(x)$

因此, 我们可以通过给出一个函数  $f$  的定义域  $\text{dom}(f)$  以及  $f$  在定义域中每个  $x$  处的值来定义一个函数

## 例

- $\text{dom}(s) =$  选课的学生, 对选课学生  $x$ ,  $s(x) = x$  的成绩
- $\text{dom}(p) = \mathbb{N}$ ,  $p(n) =$  第  $n$  个素数



# 函数

## 记法 ( $n$ 元函数)

- 考虑  $f : X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow Y$ 。  $f$  是  $X_1 \times \cdots \times X_n \times Y$  上的一个  $n + 1$  元关系。我们将  $(x_1, \dots, x_n, y) \in f$  记作  $f(x_1, \dots, x_n) = y$
- $f : X^n \rightarrow X$  常被称作  $X$  上的  $n$  元运算

## 例

自然数上的乘法是一个从  $\mathbb{N}^2$  到  $\mathbb{N}$  的 2 元函数 / 运算

# 函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

## 定理

如果  $f$  和  $g$  是函数，那么  $g \circ f$  也是函数。它的定义域  $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\text{dom}(g)]$ 。并且，对所有  $x \in \text{dom}(g \circ f)$  有  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意：函数的逆未必是函数。

# 函数

关于关系的运算，如定义域、值域、像、逆像、限制、复合都可以继承至函数

## 定理

如果  $f$  和  $g$  是函数，那么  $g \circ f$  也是函数。它的定义域  $\text{dom}(g \circ f) = f^{-1}[\text{dom}(g)]$ 。并且，对所有  $x \in \text{dom}(g \circ f)$  有  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

注意：函数的逆未必是函数。

# 函数

## 事实

给定函数  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A$  是  $X$  的子集。则  $g = f \upharpoonright A$  也是一个函数。

此时, 我们称  $g$  是  $f$  到  $A$  上的限制, 而  $f$  是  $g$  的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下, 我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

# 函数

## 事实

给定函数  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A$  是  $X$  的子集。则  $g = f \upharpoonright A$  也是一个函数。

此时, 我们称  $g$  是  $f$  到  $A$  上的限制, 而  $f$  是  $g$  的一个扩展。

注意: 在关于函数的语境下, 我们一般要求一个函数的扩展也是一个函数

# 函数

## 定义

### 一些函数的性质

- 函数  $f: X \rightarrow Y$  是 **一一的** 或 **单射**，如果对任意  $x_1, x_2 \in X$  都有  $x_1 \neq x_2$  蕴含  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 函数  $f: X \rightarrow Y$  是 **满射**，如果  $\text{ran}(f) = Y$
- 函数  $f: X \rightarrow Y$  是 **双射** 或 **一一对应**，如果它既是单射又是满射

# 函数

## 记法 (序列)

令  $I$  是一个 (下标) 集合,  $s : I \rightarrow X$  是一个函数, 我们又称  $s$  是一个 **序列**。对  $i \in I$ , 记  $s_i = s(i)$ , 记  $s = \langle s_i : i \in I \rangle$

## 例

### ■ 素数序列

$$p = \langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle = \langle p_0, p_1, \dots, \rangle = \langle 2, 3, 5, 7, \dots \rangle$$

# 枚举与集合大小

## 约定

我们将集合  $\{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$  记作  $n$

因此, 对自然数  $n, m$  来说,  $m \in n$  当且仅当  $m < n$



# 枚举与集合大小

## 定义

如果下标集  $I \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ ,  $e: I \rightarrow X$  是一个满射, 我们称  $e$  是对集合  $X$  的一个 **枚举**。

注意:

- 以自然数或自然数集为下标集的序列都是对它值域的一个枚举
- 枚举可以有穷的, 也可以是无穷的
- 一个集合可以有許多枚举

# 枚举与集合大小

## 例

- 空集  $\emptyset$  是一个序列，也是一个对  $\emptyset$  的枚举
- $\langle a, b, b, c \rangle$
- $\langle a, c, b \rangle$
- $\langle a, b, c, c, c, \dots \rangle$

# 枚举与集合大小

## 事实

如果存在一个对集合  $X$  的枚举，那么就存在一个对  $X$  的——的枚举

## 定义

- 我们称一个集合  $X$  是可枚举的 / 可数的，当且仅当存在一个对  $X$  的枚举
- 我们称一个集合  $X$  是有穷的，当且仅当存在自然数  $n$  以及对  $X$  的枚举  $e : n \rightarrow X$

# 枚举与集合大小

## 事实

如果存在一个对集合  $X$  的枚举，那么就存在一个对  $X$  的——的枚举

## 定义

- 我们称一个集合  $X$  是 **可枚举的** / **可数的**，当且仅当存在一个对  $X$  的枚举
- 我们称一个集合  $X$  是 **有穷的**，当且仅当存在自然数  $n$  以及对  $X$  的枚举  $e : n \rightarrow X$

# 枚举与集合大小

## 例

- $\mathbb{N}, \mathbb{N}^+$ ,
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{Z}$ : 考虑  $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ : Cantor's zig-zag method

# 枚举与集合大小

Cantor's zig-zag method

$$f(n, m) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$$

事实

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  是双射 (习题 \*)

我们称这样的双射是一个对函数 (pairing function)

# 枚举与集合大小

## 例 (对函数)

- $g(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$



$$h(n, m) = \begin{cases} m^2 + n - 1, & \text{if 若 } n < m \\ n^2 + n + m, & \text{否则.} \end{cases}$$

# 枚举与集合大小

## 例 (不可数的集合)

- $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow 2\}$
- $P(\mathbb{N})$
- $\mathbb{R}$

## 康托尔对角线法



# 枚举与集合大小

## 定义

我们称集合  $X$  和集合  $Y$  **等数**，记  $|X| = |Y|$ ，当且仅当存在双射  $h: X \rightarrow Y$

## 事实

集合等数是一个等价关系

# 枚举与集合大小

## 定义

- 我们称集合  $X$  不比集合  $Y$  大，记  $|X| \leq |Y|$ ，当且仅当存在单射  $f: X \rightarrow Y$
- 我们称集合  $X$  比集合  $Y$  小，记  $|X| < |Y|$ ，当且仅当  $|X| \leq |Y|$  且  $|X| \neq |Y|$ 。

# 枚举与集合大小

定理 (Cantor-Bernstein)

对任意集合  $X, Y$ , 若  $|X| \leq |Y|$  且  $|Y| \leq |X|$ , 则  $|X| = |Y|$

事实

$$|n| < |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

# 习题

- 1.4.1、1.4.5 (1), (3)、1.4.6、1.4.7、1.4.12\*
- 1.5.6
- 利用皮亚诺公理和加法定义 (书 23 页) 证明加法交换律, 即对任意自然数  $n, m$

$$n + m = m + n$$

(下页还有)

# 习题

- 对任意  $n$ , 任给  $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n$ .  
 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle = \langle y_0, \dots, y_n \rangle$  当且仅当对每个  $i \leq n$  都有  
 $x_i = y_i$
- 如果集合  $X$  和集合  $Y$  等数且  $X$  是可数的, 那么  $Y$  也是可数的

# 下期预告

- 命题逻辑的语言