数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

前情提要

- 集合，外延原理
- 空集，子集，真子集，幂集
- 并，交，差，一般并，一般交
- 有序对，卡氏积，关系
- 准序，偏序，全序（线序）

例

- 整除关系（习题）
- 考虑 $\mathbb{N}^2$ 上的关系：$(n_1, m_2) \preceq (n_2, m_2)$，当且仅当 $n_1 < n_2$，或 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \leq m_2$

定义

令 R 是一个二元关系，我们定义

- R 的 **定义域**： $\operatorname{dom} R = \{x \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } R(x,y)\}$
- R 的 **值域**： $\operatorname{ran} R = \{y \mid \text{存在 } x \text{ 使得 } R(x,y)\}$
- 集合 X 在 R 下的 **像**：

$$R[X] = \{y \mid \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } R(x,y)\}$$

- 集合 Y 在 R 下的 **逆像**：

$$R^{-1}[Y] = \{x \mid \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } R(x,y)\}$$

定义

令 R, S 一个二元关系，我们定义

- R 的 **逆**： $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- R 和 S 的 **复合**： $S \circ R = \{(x, z) \mid$ 存在 y 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S\}$

注意：$R^{-1}[Y]$ 不会出现歧义

关系

令 R, S 是二元关系。作为集合，如果 $R \subset S$，那么我们称 S 是 R 的 **延拓**，R 是 S 的 **限制**。特别地，

- 如果 S 是 $X \times Y$ 上二元关系，Z 是 X 的子集，我们称 R 是 S 在 Z 上的限制，记 $R = S \upharpoonright Z$，当且仅当

  $R = S \cap (Z \times Y)$

  此时，$\operatorname{ran} R = S[Z]$

例

令 S 是整数集 $\mathbb{Z}$ 上的后继关系，即

$$S = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j = i + 1\}$$

- $S^{-1} = \{(i,j) \mid j = i - 1\}$ 是整数上的前驱关系
- $S \circ S = \{(i,j) \mid j = i + 2\}$
- $S \upharpoonright \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的后继关系
- $S[\mathbb{N}] = \operatorname{ran}(S \upharpoonright N) = \{1, 2, 3, \ldots,\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

等价关系与划分

定义 (等价关系)

我们称 $R \subset A^2$ 是一个 等价关系， 当且仅当 R 是自返的、传递的以及对称的

例

- 等同关系
- 平行关系
- $n \equiv m \pmod{k}$

例

考虑所有人的集合 P 上的二元关系：

- $D = \{(x, y) \mid y$ 是 x 的祖先 $\}$
- $B = \{(x, y) \mid x$ 和 y 有一个共同的祖先 $\}$
- $S = \{(x, y) \mid x$ 和 y 有共同的母亲 $\}$

等价关系与划分

定义

令 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系且 $x \in X$。我们定义 以 x 为代表的 $\sim$ 等价类 为集合

$$[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

例

- $[x]_= = \{x\}$
- 定义 $x \sim y$ 当且仅当 $n \equiv m \pmod 2$。则 $[0]_\sim = \{n \mid n$ 是偶数 $\}$，而 $[3]_\sim = [11]_\sim$

引理

令 $\sim$ 是 X 上的等价关系，则对任意 $x, y \in X$，要么 $[x]_\sim = [y]_\sim$，要么 $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$

等价关系与划分

定义

给定集合 X 以及 $S \subset P(X)$。若 S 满足

- 对所有 $a, b \in S$，如果 $a \neq b$，则 $a \cap b = \emptyset$
- $\bigcup S = X$

则称 S 是 X 的一个 划分

等价关系与划分

定义

令 ~ 为 X 上的一个等价关系，我们定义

$$X/\sim \;= \{[x] \mid x \in X\}$$

为 X 在 ~ 下的商集

等价关系与划分

定理

令 $\sim$ 为 X 上的一个等价关系。则 $X/\sim$ 是 X 的一个划分

定理

令 S 为 X 的一个划分。定义 X 上二元关系

$$\sim_S = \{(x,y) \in X^2 \mid \text{存在 } Y \in S \text{ 使得 } x, y \in Y\}$$

则 $\sim_S$ 是 X 上的一个等价关系

定义 (n 元有序组)

- 我们称有序对 (a, b) 是一个 2 元有序组
- 对 $n \geq 1$，任给 $x_0, \ldots x_n, x_{n+1}$，定义 $n+2$ 元有序组 $(x_0, \ldots, x_{n+1}) = ((x_0, \ldots, x_n), x_{n+1})$

事实

对任意 n，任给 $x_0, \ldots, x_{n+1}, y_0, \ldots, y_{n+1}$。

$(x_0, \ldots, x_{n+1}) = (y_0, \ldots, y_{n+1})$ 当且仅当对每个 $i \leq n+1$ 都有 $x_i = y_i$

关系

定义

- 定义卡氏积 $X_1 \times \cdots \times X_n$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \,\big|\, 对\ 1 \le i \le n，\ x_i \in X_i\}$$
- 我们称 $R \subset X^n$ 是 X 上的一个 n 元关系
- 令 R 是一个 n 元关系。我们通常将 $(x_0, \ldots, x_n) \in R$ 记作 $R(x_1, \ldots, x_n)$

习题

令 R, S, T 是任意二元关系，X, Y 是任意集合。证明：

- $R[X \cap Y] \subset R[X] \cap R[Y]$ （等号成立吗，能举出反例吗?）
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
- $(R \circ S)^{-1} = (S^{-1}) \circ (R^{-1})$
- $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

习题

- 1.5.1、1.5.5、1.5.9（若没来得及讲）
- 假设 $\leq$ 是 X 上的一个准序。定义 X 上关系

$$\sim = \{(x, y) \in X^2 \mid x \leq y \text{ 且 } y \leq x\}$$

  - 证明 $\sim$ 是 X 上的等价关系。
  - 定义 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$，使得 $[x] \leq [y]$ 当且仅当 $x \leq y$，并证明 $\leq$ 是偏序

下期预告

- 自然数上的归纳法
- 函数
- 集合的大小