数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

课程信息

- 时间地点：
  - 周一 9:55 - 11:35，HGX308 （讲座课）
  - 周四 18:30-20:10，HGX303 （习题课、讲座课）
- 网站：

  `https://aplacenearby.ggr.fun/mathlogic2020`
- 教材：《数理逻辑：证明及其限度》（第二版），复旦大学出版社

课程团队

- 杨睿之

  邮箱：yangruizhi@fudan.edu.cn

- 刘桢

  邮箱：19210160030@fudan.edu.cn

- 吴近悦

  邮箱：20210160028@fudan.edu.cn

- 杨博

  邮箱：20210160029@fudan.edu.cn

前情提要

- 逻辑是关于真的一些普遍的规律
- 逻辑即数理逻辑，即数学的逻辑以及数学化的逻辑
- 我们都有具备逻辑思考的能力，那我们又能从这门课学到什么?

本学期我们要做的

- 练习阅读数学定义、定理、证明，撰写数学证明
- 严格地定义什么是定义、什么是真、什么是证明

本学期我们要做的

用数学的方法研究数学的逻辑

作为基础的集合论

- 集合论基于人们关于“集合”概念的直观
- 集合论被广泛接受为当代数学的基础
- 我们将首先在集合论的语言下讲述数理逻辑

直观中的集合

- 一些东西聚在一起组成一个集合
- 若 a 是集合 X 中的对象，我们称 a 是 X 的元素，或 a 属于 X，记作 $a \in X$

直观中的集合

例

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\{x \mid \varphi(x)\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 $\emptyset$

直观中的集合

- 集合是无关排序的

例

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$$

- 对象在集合的描述中出现的次数与集合本身无关

例

$$\{a, a, b\} = \{a, b, b\} = \{a, b\}$$

直观中的集合

集合的外延原理（principle of extensionality）

任给集合 A, B， $A = B$ 当且仅当 A 和 B 有相同的元素。

例

- { 刘桢、吴近悦、杨博 }

  $= \{p \mid p$ 是 2020 秋课程 PHIL130175h.01 的助教 $\}$

- 空集是唯一的

直观中的集合

例

一些重要的集合:

- 布尔值集 $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- 自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- 整数集 $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- 有理数集 $\mathbb{Q} = \left\{z/n \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&\; n \neq 0\right\}$
- 实数集 $\mathbb{R}$

集合

定义 (子集)

给定集合 A, B。我们称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$，当且仅当任何 A 中的元素都是 B 中的元素。

例

- $$\{p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教}\} \subset \{p \mid p \text{ 是 PHIL130175h.01 课程团队成员}\}$$
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

集合

事实

- 对任意集合 A, B，$A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$。
- 空集是任何集合的子集

定义 (真子集)

我们称 A 是 B 的 真子集 ，记作 $A \subsetneq B$ ，当且仅当 $A \subset B$ 且 $A \neq B$。

定义 (幂集)

集合 X 的 幂集 （记作 $P(X)$ ）是它所有子集组成的集合。

例

列出 $P(\{a, b, c\})$ 的所有元素

定义 (并、交、差)

给定集合 A, B，我们定义

- A 和 B 的 并，$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$
- A 和 B 的 交，$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$
- A 和 B 的 差，$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$

例

- $\{a, b, c\} \cup \{b, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{b, d\} = \{b\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b, c\}$

例

- $\{a, b, c\} \cap \{d\} = \emptyset$

若 $A \cap B = \emptyset$，我们称 A 与 B 不交。

集合

记法

- 如果集合 $\mathscr{F}$ 中元素都是集合，我们又称 $\mathscr{F}$ 为 集合族。
- 有时我们会记 $\mathscr{F} = \{X_i \mid i \in I\}$，其中 I 是一个 下标集。

常见的下标集有 $\{1, \ldots, n\}$， $\mathbb{N}$

例

$\{a_i \mid i < n\}$， $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

集合

令 $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$，则 $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = ((X_1 \cup X_2) \cup X_3)$。

定义 (一般并、一般交)

- $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid$ 存在 $X \in \mathcal{F}$ 使得 $x \in X\}$
- 对 $\mathcal{F} \neq \emptyset$，

  $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid$ 对所有 $X \in \mathcal{F}$ 都有 $x \in X\}$

集合

记法

令 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$，记

- $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup \mathcal{F}$
- $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \mathcal{F} \quad (I \neq \emptyset)$

例

令 $X_i = \{n + i \mid n \in \mathbb{N}\}$，$\mathcal{F} = \{X_i \mid i \geq 3\}$，那么

- $\bigcup \mathcal{F} = ?$
- $\bigcap \mathcal{F} = ?$

关系

例 (关系)

- 朋友 / 把……当作朋友
- 相邻
- 序（大小）
- 整除
- 相等

记法

我们用 (a, b) 表示由 a, b 按 a 前 b 后组成的 有序对

有序对的直观: 与集合不同，如果 $a \neq b$，我们希望有序对 $(a, b) \neq (b, a)$。更严格地，任给 a_1, a_2, b_1, b_2，我们要求 $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$，当且仅当 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$

关系

定义 (卡氏积)

任给集合 A, B，定义 卡氏积 （Cartesian product）

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

我们记 $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

关系

定义

我们称 R 是 A, B 之间的一个 二元关系 ，当且仅当 $R \subset A \times B$；称 R 是 A 上的一个 二元关系 ，当且仅当 $R \subset A^2$。

记法

我们记 Rab 或 aRb，当且仅当 $(a, b) \in R$

例

$\mathbb{N}$ 上的二元关系:

- 等同关系 $\mathsf{Id}_{\mathbb{N}} = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- 严格小于关系

  $< = \{(n,m) \mid n < m \ \& \ n,m \in \mathbb{N}\} = \{(0,1),(0,2),(1,2),\ldots\}$
- 整除关系 $\{(n,m) \mid n|m \ \& \ n,m \in \mathbb{N}\} = \{(n,m) \mid$ 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $m = n * k\}$

关系

定义 (几个关系的性质)

- 关系 $R \subset A^2$ 是 自返的，当且仅当对任意 $a \in A$ 有 Raa
- 关系 $R \subset A^2$ 是 传递的，当且仅当对任意 $a, b, c \in A$ 有，Rab 与 Rbc 蕴含 Rac
- 关系 $R \subset A^2$ 是 对称的，当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有，Rab 蕴含 Rba
- 关系 $R \subset A^2$ 是 反对称的，当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有，Rab 与 Rba 蕴含 $a = b$

定义 (序)

令 $R \subset A^2$

- 若 R 是自反的、传递的，我们称 R 是一个 A 上的 准序 （preorder）
- 若准序 R 是反对称的，则称 R 是一个 A 上的 偏序 （partial order）
- 若偏序 R 满足对任意 $a, b \in A$ 有 aRb 或 bRa，则称 R 是 A 上的一个 全序 或 线序

例

- 整除关系（习题）
- 考虑 $\mathbb{N}^2$ 上的关系：$(n_1, m_2) \preceq (n_2, m_2)$，当且仅当 $n_1 < n_2$，或 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \leq m_2$

习题

- 1.2.3、1.2.4、1.3.2、1.3.3
- 证明：如果 $X \subset Y$，那么 $X \cap Y = X$
- 举例：R 是对称的也是反对称的
- 验证：自然数集 $\mathbb{N}$ 上的整除关系是偏序。整数集 $\mathbb{Z}$ 上的整除关系呢?
- 考虑 $\mathcal{F} = \{X_i \,\big|\, i \in \mathbb{N}\}$，对 $i < \mathbb{N}$，定义 $Y_i = \bigcap_{j \le i} X_j$。证明：$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$

下期预告

- 关系上的运算
- 等价关系与划分