

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

课程信息

- 时间地点:

- 周一 9:55 - 11:35, HGX308 (讲座课)

- 周四 18:30-20:10, HGX303 (习题课、讲座课)

- 网站:

<https://aplacenearby.ggr.fun/mathlogic2020>

- 教材:《数理逻辑:证明及其限度》(第二版), 复旦大学出版社

课程团队

- 杨睿之

邮箱: yangruizhi@fudan.edu.cn

- 刘桢

邮箱: 19210160030@fudan.edu.cn

- 吴近悦

邮箱: 20210160028@fudan.edu.cn

- 杨博

邮箱: 20210160029@fudan.edu.cn

前情提要

- 逻辑是关于真的一些普遍的规律
- 逻辑即数理逻辑，即数学的逻辑以及数学化的逻辑
- 我们都有具备逻辑思考的能力，那我们又能从这门课学到什么？

本学期我们要做的

- 练习阅读数学定义、定理、证明，撰写数学证明
- 严格地定义什么是定义、什么是真、什么是证明

本学期我们要做的

用数学的方法研究数学的逻辑

作为基础的集合论

- 集合论基于人们关于“集合”概念的直观
- 集合论被广泛接受为当代数学的基础
- 我们将首先在集合论的语言下讲述数理逻辑

直观中的集合

- 一些东西聚在一起组成一个集合
- 若 a 是集合 X 中的对象, 我们称 a 是 X 的**元素**, 或 a **属于** X , 记作 $a \in X$

直观中的集合

例

- { 刘桢、吴近悦、杨博 }
- { p | p 是 2020 年秋课程 PHIL130175h.01 的助教 }
- 不含任何元素的集合——空集，记作 \emptyset

直观中的集合

例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{p \mid p \text{ 是 2020 年秋课程 PHIL130175h.01 的助教}\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 \emptyset

直观中的集合

例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{p \mid p \text{ 是 2020 年秋课程 PHIL130175h.01 的助教}\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 \emptyset

直观中的集合

例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{x \mid \varphi(x)\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 \emptyset

直观中的集合

例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{x \mid \varphi(x)\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 \emptyset

直观中的集合

- 集合是无关排序的

例

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$$

- 对象在集合的**描述**中出现的次数与集合本身无关

例

$$\{a, a, b\} = \{a, b, b\} = \{a, b\}$$

直观中的集合

集合的外延原理 (principle of extensionality)

任给集合 A, B , $A = B$ 当且仅当 A 和 B 有相同的元素。

例

- { 刘桢、吴近悦、杨博 }
= { p | p 是 2020 秋课程 PHIL130175h.01 的助教 }
- 空集是唯一的

直观中的集合

例

一些重要的集合：

- 布尔值集 $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- 自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- 整数集 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- 有理数集 $\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in \mathbb{Z} \ \& \ n \in \mathbb{N} \ \& \ n \neq 0\}$
- 实数集 \mathbb{R}

集合

定义 (子集)

给定集合 A, B 。我们称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$ ，当且仅当任何 A 中的元素都是 B 中的元素。

例

- $\{p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教} \}$
 $\subset \{p \mid p \text{ 是 PHIL130175h.01 课程团队成员} \}$
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

集合

事实

- 对任意集合 A, B , $A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 。
- 空集是任何集合的子集

定义 (真子集)

我们称 A 是 B 的 **真子集**, 记作 $A \subsetneq B$, 当且仅当 $A \subset B$ 且 $A \neq B$ 。

集合

定义 (幂集)

集合 X 的 **幂集** (记作 $P(X)$) 是它所有子集组成的集合。

例

列出 $P(\{a, b, c\})$ 的所有元素

集合

定义 (并、交、差)

给定集合 A, B , 我们定义

- A 和 B 的 **并**, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
- A 和 B 的 **交**, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
- A 和 B 的 **差**, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

集合

例

- $\{a, b, c\} \cup \{b, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{b, d\} = \{b\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b, c\}$

集合

例

- $\{a, b, c\} \cap \{d\} = \emptyset$

若 $A \cap B = \emptyset$, 我们称 A 与 B 不交。

集合

记法

- 如果集合 \mathcal{F} 中元素都是集合, 我们又称 \mathcal{F} 为 **集合族**。
- 有时我们会记 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$, 其中 I 是一个 **下标集**。

常见的下标集有 $\{1, \dots, n\}$, \mathbb{N}

例

$\{a_i \mid i < n\}$, $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

集合

令 $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$, 则 $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = ((X_1 \cup X_2) \cup X_3)$ 。

定义 (一般并、一般交)

- $\cup \mathcal{F} = \{x \mid \text{存在 } X \in \mathcal{F} \text{ 使得 } x \in X\}$
- 对 $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
 $\cap \mathcal{F} = \{x \mid \text{对所有 } X \in \mathcal{F} \text{ 都有 } x \in X\}$

集合

令 $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$, 则 $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = ((X_1 \cup X_2) \cup X_3)$ 。

定义 (一般并、一般交)

- $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \text{存在 } X \in \mathcal{F} \text{ 使得 } x \in X\}$
- 对 $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
 $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \text{对所有 } X \in \mathcal{F} \text{ 都有 } x \in X\}$

集合

记法

令 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$, 记

- $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup \mathcal{F}$
- $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \mathcal{F} \quad (I \neq \emptyset)$

集合

例

令 $X_i = \{n + i \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \geq 3\}$, 那么

- $\cup \mathcal{F} = ?$
- $\cap \mathcal{F} = ?$

关系

例 (关系)

- 朋友 / 把.....当作朋友
- 相邻
- 序 (大小)
- 整除
- 相等

关系

记法

我们用 (a, b) 表示由 a, b 按 a 前 b 后组成的 **有序对**

有序对的直观: 与集合不同, 如果 $a \neq b$, 我们希望有序对

$(a, b) \neq (b, a)$ 。更严格地, 任给 a_1, a_2, b_1, b_2 , 我们要求

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, 当且仅当 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$

关系

定义 (卡氏积)

任给集合 A, B , 定义 **卡氏积** (Cartesian product)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

我们记 $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

关系

定义

我们称 R 是 A, B 之间的一个 **二元关系**，当且仅当 $R \subset A \times B$ ；称 R 是 A 上的一个 **二元关系**，当且仅当 $R \subset A^2$ 。

记法

我们记 Rab 或 aRb ，当且仅当 $(a, b) \in R$

关系

例

\mathbb{N} 上的二元关系:

- 等同关系 $\text{Id}_{\mathbb{N}} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- 严格小于关系
 $\leq = \{(n, m) \mid n < m \ \& \ n, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), \dots\}$
- 整除关系 $\{(n, m) \mid n|m \ \& \ n, m \in \mathbb{N}\} = \{(n, m) \mid \text{存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } m = n * k\}$

关系

定义 (几个关系的性质)

- 关系 $R \subset A^2$ 是 **自返的** , 当且仅当对任意 $a \in A$ 有 Raa
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **传递的** , 当且仅当对任意 $a, b, c \in A$ 有, Rab 与 Rbc 蕴含 Rac
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **对称的** , 当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有, Rab 蕴含 Rba
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **反对称的** , 当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有, Rab 与 Rba 蕴含 $a = b$

关系

定义 (序)

令 $R \subset A^2$

- 若 R 是自反的、传递的，我们称 R 是一个 A 上的 **准序** (preorder)
- 若准序 R 是反对称的，则称 R 是一个 A 上的 **偏序** (partial order)
- 若偏序 R 满足对任意 $a, b \in A$ 有 aRb 或 bRa ，则称 R 是 A 上的一个 **全序** 或 **线序**

关系

例

- 整除关系 (习题)
- 考虑 \mathbb{N}^2 上的关系: $(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2)$, 当且仅当 $n_1 < n_2$, 或 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \leq m_2$

习题

- 1.2.3、1.2.4、1.3.2、1.3.3
- 证明：如果 $X \subset Y$ ，那么 $X \cap Y = X$
- 举例： R 是对称的也是反对称的
- 验证：自然数集 \mathbb{N} 上的整除关系是偏序。整数集 \mathbb{Z} 上的整除关系呢？
- 考虑 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ，对 $i < \mathbb{N}$ ，定义 $Y_i = \bigcap_{j \leq i} X_j$ 。证明： $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Y_i$

下期预告

- 关系上的运算
- 等价关系与划分