数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2020 年秋季

课程信息

- 时间地点:
  - 周一 9:55 - 11:35，HGX308 （讲座课）
  - 周四 18:30-20:10，HGX303 （习题课、讲座课）
- 网站:

  https://aplacenearby.ggr.fun/mathlogic2020
- 教材:《数理逻辑：证明及其限度》（第二版），复旦大学出版社

课程团队

- 杨睿之

  邮箱：yangruizhi@fudan.edu.cn

- 刘桢

  邮箱：19210160030@fudan.edu.cn

- 吴近悦

  邮箱：20210160028@fudan.edu.cn

- 杨博

  邮箱：20210160029@fudan.edu.cn

什么是逻辑?

这算逻辑吗？

例

- COVID-19 首先在武汉爆发
- COVID-19 的病原体是冠状病毒 SARS-CoV-2，SARS-CoV-2 被证明与蝙蝠来源的病毒高度相似
- 中国唯一的 P4 生物实验室武汉病毒研究所位于武汉
- 病毒所的科研人员曾研究冠状病毒并从自然界的蝙蝠体内提取病毒样本
- 由此推出：所以 SARS-CoV-2 要么是武汉病毒所制造的生物武器，要么是事故泄露

:(

Your PC ran into a problem and needs to restart. We're just collecting some error info, and then we'll restart for you.

If you'd like to know more, you can search online later for this error: ALWAYS_LOOK_ON_THE_BRIGHT_SIDE_OF_LIFE

这算逻辑吗?

例

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：二号内存条是元凶！

这算逻辑吗？

例

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：二号内存条是元凶！

这算逻辑吗？

例

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：二号内存条是元凶！

这算逻辑吗？

例

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：二号内存条是元凶！

这算逻辑吗?

例

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：二号内存条是元凶!

这算逻辑吗？

例

- 电脑经常蓝屏
- 重装系统后依然会蓝屏
- 拔下显卡、网卡、光驱、第二硬盘后依然会蓝屏
- 拔下一号内存条，只用二号内存条，依然会蓝屏
- 拔下二号内存条，只用一号内存条，不再蓝屏
- 由此推出：二号内存条是元凶！

因果关系不是逻辑

例

- 人是理性动物
- $$\Delta t_m = \frac{\Delta t_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

例

- 人是理性动物
-

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_s}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

特定领域的知识不是逻辑

例

黄金戒律：己所不欲勿施于人

道德律令不是逻辑

亚里士多德三段论

人	是	自私的
孔子	是	人
孔子	是	自私的

亚里士多德三段论

人	是	自私的
孔子	是	人
孔子	是	自私的

命题逻辑

A	B	$A \to B$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

命题逻辑

A	B	$A \to B$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

实质蕴涵怪论：

假命题蕴含一切

谓词逻辑

有人是所有人的朋友，那么所有人都有朋友

$$\exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy$$

谓词逻辑

有人是所有人的朋友，那么所有人都有朋友

$$\exists x \forall y F xy \to \forall y \exists x F xy$$

谓词逻辑

人	是	自私的
孔子	是	人
孔子	是	自私的

谓词逻辑

$$\frac{\begin{array}{r}\forall x(Px \to Sx)\\ Pc\end{array}}{Sc}$$

到底什么是逻辑?

逻辑是关于真的

这门课的哲学前提

我们不接受彻底的怀疑论

高尔吉亚（Gorgias）：

- 没有东西存在；
- 就算有东西存在，也无法认识它；
- 就算能认识它，也无法与他人谈论它；
- 就算能谈论它，也无法互相理解。

这个我们不能接受

苏格拉底（Socrates）：

- 辩论是为了寻找真
- 就算被驳倒了也可能有所收获——真

我们能够接受的程度：

- 黑客帝国
- 缸中脑
- 物理主义（抽象实体不存在）

……

我们预设：

在一些情况下，我们可以谈论真（Truth）

下述预设大概没什么问题：

- 如果我们可以有意义地谈论命题 A 和 B 是否为真，那么我们也可以有意义地谈论"并非 A"、"A 并且 B"等等是否为真。
- 如果我们可以谈论，某个人，例如"苏格拉底会死"是否为真，那么我们也可以有意义地谈论"所有人都会死"或"存在一个不会死的人"是否为真。

作为“终极”概念的真概念

对任何概念/性质/集合 P 以及对象 a，当我们问 a 是不是落在概念 P 之下，我们可以问 Pa 是不是真的。

作为“终极”概念的真概念

令 $T = \{\sigma \mid \sigma \text{ 是真的 }\}$，考虑句子 τ 说的是 $\neg T\tau$。

问题：τ 是不是真的？

作为“终极”概念的真概念

令 $T = \{\sigma \mid \sigma$ 是真的 $\}$，考虑句子 τ 说的是 $\neg T\tau$。

问题：τ 是不是真的?

塔斯基（Tarski）:

- 我们只能谈论特定领域的真 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \{\sigma \mid \mathfrak{A} \vDash \sigma\}$
- $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ 不是 $\mathfrak{A}$ 中可定义的
- 日常语言的 真 是不可定义的

我们无法一劳永逸地把握 真

逻辑谈论的只是关于真的一些的规律

逻辑谈论的只是关于真的一些普遍性的规律

两个问题：

- 哪些领域的真是比较容易准确地谈论的？
- 我们能谈论多少关于真的普遍的规律？

哪些真假是比较容易准确地谈论的?

- 拜登或许会赢得大选
- 数理逻辑使人头秃
- $\boxed{\text{框中的是假话}}$
- 电子 a 与原子 b 在时间 t 的距离是 10^{-15} 米
- 上帝存在

哪些真假是比较容易准确地谈论的?

- 拜登或许会赢得大选
- 数理逻辑使人头秃
- $\boxed{\text{框中的是假话}}$
- 电子 a 与原子 b 在时间 t 的距离是 10^{-15} 米
- 上帝存在

哪些真假是比较容易准确地谈论的?

- 拜登或许会赢得大选
- 数理逻辑使人头秃
- 框中的是假话
- 电子 a 与原子 b 在时间 t 的距离是 10^{-15} 米
- 上帝存在

哪些真假是比较容易准确地谈论的?

- 拜登或许会赢得大选
- 数理逻辑使人头秃
- $\boxed{\text{框中的是假话}}$
- 电子 a 与原子 b 在时间 t 的距离是 10^{-15} 米
- 上帝存在

哪些真假是比较容易准确地谈论的?

- 拜登或许会赢得大选
- 数理逻辑使人头秃
- 框中的是假话
- 电子 a 与原子 b 在时间 t 的距离是 10^{-15} 米
- 上帝存在

要让我们的推理有规可循，唯一方法是把它做得像数学那样扎扎实实，这样我们一眼就可以看到错误所在，当人们之间产生争议的时候，我们只要说：让我们坐下来算一算（let us calculate），不需要更多的忙乱就可以看到谁是对的。

莱布尼茨（The Art of Discovery）

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如:

- $5 + 7 = 12$
- 存在任意大的素数
- $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} + \cdots = 3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如:

- $5 + 7 = 12$
- 存在任意大的素数
- $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} + \cdots = 3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如:

- $5 + 7 = 12$
- 存在任意大的素数
- $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} + \cdots = 3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

谈论一个数学命题的真假似乎没什么问题

例如:

- $5 + 7 = 12$
- 存在任意大的素数
- $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} + \cdots = 3$
- 存在一个不可数的实数集合，其元素的个数比由所有实数组成的集合的严格地少。

而以现代的标准，在弗雷格（Frege）1879 年《概念文字》（*Begriffsschrift*）出版以前（尽管数学已非常发达），许多数学命题尚没有严格的表述，许多数学证明也都不是严格有效的。

他（莱布尼茨）关于通用文字或者哲学演算或推理的想法太过庞大……即使这是一个有价值的目标，它也无法一步就达到。我们无需为一个缓慢而步步为营的迫近而感到失望。当一个问题看似无法以其最一般的形态得到解决时，可以暂时做个限定；或许它可以靠渐进的方式来征服。算术、几何、化学中的符号可以被看作是莱布尼茨的想法在特定领域的实现。而这里所给出的概念文字又增加了一个领域，实际上是一个中心领域，与其他所有领域相连。

弗雷格（1879）

本课程中

逻辑 = 数理逻辑（mathematical logic）

关于真，逻辑到底能谈论多少？

逻辑学是否提供新知识?

培根 (Francis Bacon): 亚里士多德《工具论》中的那些纯演绎的方法（三段论）不足以发现科学真理，因此需要《新工具》(*Novum Organum Scientiarum*)

康德 (Immanuel Kant): 分析命题（主项包含谓项）不提供新知识，后天综合命题讲述经验世界的知识，而哲学、数学知识应该是先天综合命题。

逻辑学是否提供新知识？

培根（Francis Bacon）：亚里士多德《工具论》中的那些纯演绎的方法（三段论）不足以发现科学真理，因此需要《新工具》（*Novum Organum Scientiarum*）

康德（Immanuel Kant）：分析命题（主项包含谓项）不提供新知识，后天综合命题讲述经验世界的知识，而哲学、数学知识应该是先天综合命题。

我认为，所有人都先天具备逻辑思考的能力

那我们又能从这门课学到什么？

我认为，所有人都先天具备逻辑思考的能力

那我们又能从这门课学到什么？

希望经过本学期的学习可以回答的问题：

$$\{\sigma \mid \forall \mathfrak{A}\ \mathfrak{A} \vDash \sigma\}$$ 是个怎样的集合？

最后，关于逻辑学有什么用

希尔伯特 1930 格尼斯堡演讲

有这样一种工具，它能将理论与实践，将思想与观察联系起来、那就是数学；它搭建了连接的桥梁并使之愈加坚固。以至于，我们整个当代文化，就其依赖于我们对自然的理智洞察与利用的范围内而言，是以数学为基础的。

希尔伯特 1930 格尼斯堡演讲

伽利略早就说过：只有习得了自然对我们诉说时所使用的语言和符号，一个人才能理解自然；而这个语言正是数学，它的符号则是数学图形。

康德宣称："我始终认为，存在于每个特定的自然科学中的真理不会比数学中的真理更多。"

希尔伯特 1930 格尼斯堡演讲

事实上，只有当我们提炼出一门自然科学的数学内核并将其彻底揭开时，我们才算掌握了它的理论。

没有数学，今天的天文学和物理学将是不可能的；在它们的理论部分，这些科学直接展开为数学。正如大量其他的应用一样，这些事实使数学享有在公众中无与伦比的权威。

希尔伯特 1930 格尼斯堡演讲

尽管如此，所有数学家都拒绝将应用作为数学价值的标准。

高斯在说到是什么让数论成为这位数学第一人最喜爱的学科时，提到的是它那魔法般的吸引力而不是它目前为止超越所有其他数学分支的那无穷无尽的丰富性。

克罗内克将数论学家比作食莲族，一旦尝到了甜头便再也无法离开它了。

希尔伯特 1930 格尼斯堡演讲

伟大的数学家庞加莱曾以令人震惊的犀利抨击了托尔斯泰，后者声称“以科学的名义追求科学”是愚蠢的。例如，若只有那些实用主义头脑存在而没有那些无私的傻瓜来推动进步的话，工业上的成就是永远没有可能的。

正如格尼斯堡的数学家雅可比所说，人类精神的荣耀才是所有科学唯一的目标。

希尔伯特 1930 格尼斯堡演讲

我们绝不相信那些今天还以哲学的姿态或以优越的口吻所做的关于文化衰落的预言并接受不可知。对我们来说，不可知是不存在的，并且在我看来，在自然科学中也不存在。让我们抛弃那个愚蠢的不可知，代之以下面的口号：

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

欢迎关注

图: 复旦数理逻辑

下期预告

9 月 17 日 18:30，HGX303

预备知识

- 集合