数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

前情提要

前情提要

一阶逻辑希尔伯特系统的可靠性与完全性:

$$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

一阶逻辑的紧致性: 一阶逻辑公式集 Σ 是有穷可满足的当且仅当 Σ 是有穷可满足的

前情提要

紧致性定理的应用

定理

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$，Σ 是 $\mathcal{L}$ 的一个闭语句集。假设它有任意大的有穷模型，那么它就有无穷模型。

推论

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$。所有有穷 $\mathcal{L}$ 结构组成的类不是广义初等类，所有无穷结构组成的类不是初等类。

前情提要

紧致性定理的应用 存在非标准的算术模型

定理

令 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ 是标准算术模型。那么存在一个非标准算术模型 $\mathfrak{N}^*$，$\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^*$ 且 $\mathfrak{N}^*$ 含有“无穷”（非标准）自然数

勒文海姆-斯寇伦定理

定理 (勒文海姆-斯寇伦定理)

假设语言 $\mathcal{L}$ 可数。

下行的勒文海姆-斯寇伦定理

令 Σ 是一集 $\mathcal{L}$-公式。如果 Σ 是可满足的，那么存在一个可数的 Σ 模型。因此，对任何 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$，存在可数的 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{B}$ 使得 $|\mathfrak{A}| \equiv |\mathfrak{B}|$

上行的勒文海姆-斯寇伦定理

如果 $\mathcal{L}$-公式集 Σ 有无穷模型，那么对任何无穷基数 κ，存在 Σ 的基数为 κ 的模型。

一阶逻辑完全性定理在告诉我们希尔伯特公理系统可以完全刻画一阶逻辑的同时也告诉我们一阶逻辑表达力的限度

二阶逻辑与集合论

皮亚诺算术公理系统 (PA)：语言 $\mathcal{L}_{\text{PA}} = \{0, S, +, \cdot\}$

1. $\forall x\, Sx \neq 0$ 非零数都有后继
2. $\forall x \forall y\, Sx = Sx \to x = y$ 后继函数是一一的
3. $\forall x\, x + 0 = x$ 加法递归定义
4. $\forall x \forall y\, x + Sy = S(x + y)$
5. $\forall x\, x \cdot 0 = 0$ 乘法递归定义
6. $\forall x \forall y\, x \cdot Sy = x \cdot y + x$
7. 对每个 $\mathcal{L}$-公式 $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ 有： 归纳原理

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\varphi(0) \to \forall x\, (\varphi(S) \to \varphi(Sx)) \to \forall x \varphi(x)\right)$$

显然，$\mathrm{PA} \subset \mathrm{Th}(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$

根据紧致性定理，无论 PA 还是 $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ 都有非标准模型

根据勒文海姆-斯寇伦定理，PA / $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ 有任意大的无穷模型

二阶逻辑与集合论

二阶谓词逻辑：

- 在表示论域中一阶对象的变元 $v_0, v_1, \ldots$ 之外，加入表示二阶对象（如论域上集合、关系、函数）的二阶变元：$X_0, X_1, \ldots$、$Y_0^{(n)}, Y_1^{(n)}, \ldots$ 等
- 加入连接一阶变元、常元与二阶变元、常元（谓词、函数符号）的“谓词”或句法构造。如：$x \in X$ 或 Xx
- 语义解释：例如，$x \in X$ 或 Xx 表示“对象 x 属于集合 X”；$\forall X \varphi$ 表示对任意论域的子集 X 有 φ

二阶逻辑与集合论

考虑二阶版本的归纳原理：

$$\forall X\ (0 \in X \to \forall x\ (x \in X \to S\,x \in X) \to \forall x\ x \in X)$$

PA 加二阶版本的归纳原理是没有非标准模型的

所以，二阶逻辑没有紧致性定理（好事?)，没有完全性定理（坏事）

二阶逻辑与集合论

考虑二阶版本的归纳原理：

$$\forall X\ (0 \in X \to \forall x\ (x \in X \to S\,x \in X) \to \forall x\ x \in X)$$

PA 加二阶版本的归纳原理是没有非标准模型的

所以，二阶逻辑没有紧致性定理（好事?），没有完全性定理（坏事）

二阶逻辑与集合论

考虑二阶版本的归纳原理：

$$\forall X\ (0 \in X \to \forall x\ (x \in X \to S\,x \in X) \to \forall x\ x \in X)$$

PA 加二阶版本的归纳原理是没有非标准模型的

所以，二阶逻辑没有紧致性定理（好事?），没有完全性定理（坏事）

二阶逻辑与集合论

蒯因：二阶逻辑是 “set theory in sheep's clothing”

Zermelo-Fraenkel 集合论公理系统（ZF）:

- $\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ 外延公理
- $\forall x \forall y \exists z \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$ 对集公理
- $\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in x))$ 并集公理
- $\exists x (0 \in x \wedge \forall z\, (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x))$ 无穷公理

……

二阶逻辑与集合论

作为一阶理论的集合论可以“决定”自然数集：

$$\mathsf{ZF} \vdash \exists! x\ (x \text{ 是 } \subset\text{-最小的见证无穷公理成立的集合})$$

集合论是被广泛接受的数学基础：做数学证明就是在 ZF 下做内定理证明

二阶逻辑与集合论

作为一阶理论的集合论可以“决定”自然数集：

$$\mathsf{ZF} \vdash \exists! x \; (x \text{ 是 } \subset\text{-最小的见证无穷公理成立的集合})$$

集合论是被广泛接受的数学基础：做数学证明就是在 ZF 下做内定理证明

斯寇伦佯谬

- ZF $\vdash$ 存在不可数的集合
- 如果 ZF 一致，那么 ZF 有一个可数模型 $\mathfrak{M}$
- $\mathfrak{M} \models$ 存在不可数的集合

当然，ZF 也有非标准模型

哥德尔不完全性定理

定理 (哥德尔不完全性定理)

任何一阶公理系统，如果能它能解释 PA – 归纳原理，那么它要么是不一致的，要么是不完全的。如果它能解释 PA 并且是一致的，那么它证明不了自己的一致性

例

- PA
- ZF

哥德尔不完全性定理

推论

如果 PA 一致，那么 PA $+ \neg \mathrm{Con}(\mathrm{PA})$ 一致

你能想象一个 PA $+ \neg \mathrm{Con}(\mathrm{PA})$ 的模型吗？

哥德尔不完全性定理

既然允许公理集是无穷的，我们为什么不干脆使用 $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ 和 $\mathrm{Th}(V, \in)$ 做公理？

完全的公理化理论

定义

一个 $\mathcal{L}$ 语言的理论 T 是 κ-范畴的（categorical），当且仅当对任意 κ 大的结构 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 有 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$。

事实

令 T 是可数语言 $\mathcal{L}$ 的理论。如果 T 的模型都是无穷模型，并且存在 κ 使得 T 是 κ-范畴的，那么 T 是完全的

完全的公理化理论

例

无端点稠密线性序是 ω-范畴的。特别地，

$\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, \leq) = \mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq)$

完全的公理化理论

考虑 实数域：$(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$

事实

- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 不是 ω-范畴的：代数数 vs 代数数 $+\{\pi\}$
- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 不是 $|\mathbb{R}|$-范畴的：非标准分析
- $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 不是任何 κ-范畴的

完全的公理化理论

$\mathrm{Th}(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 有一个完全的公理化——实闭域理论 (real closed field)：

- 有序域公理
  - 域公理
  - $\forall x \forall y \forall z\ (x < y \to x + z < y + z)$
  - $\forall x \forall y\ (0 < x \to 0 < b \to 0 < a \cdot b$
- 每个正数都有一个平方根
- 任何奇数次多项式都有解（公理模式）

完全的公理化理论

定理

实闭域理论 T 允许量词消去。即，对任意 $\{\leq, 0, 1, +, \cdot\}$ 语言中公式 φ，存在一个无量词的公式 ψ，使得

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

推论

- 实闭域理论是完全的
- 实闭域理论 $\{\sigma \mid T \vdash \sigma\}$ 是可判定的

完全的公理化理论

注意，这不意味着我们就可以用一台电子计算机代替所有实分析学家的工作。一些关于 $(\mathbb{R}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 的陈述不是一阶的。

例

$\mathbb{R}$ 是完备的，即每个 R 的有上界子集都有上确界

完全的公理化理论

考虑： 复数域 $(\mathbb{C}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$

事实

$\mathrm{Th}(\mathbb{C}, \leq, 0, 1, +, \cdot)$ 有一个完全的公理化——特征 0 的代数闭域（algebraically closed field）：

- 域公理
- 每个多项式都有解
- $1 + \cdots + 1 \neq 0$

完全的公理化理论

事实

- 特征 0 的代数闭域是 $|\mathbb{R}|$-范畴的
- 特征 0 的代数闭域允许量词消去
- 特征 0 的代数闭域是完备的可判定的理论

The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.