

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

# 前情提要

# 前情提要

可靠性定理:

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明要点:

- 检验每条公理都是有效的
- 替换引理:  $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s_{s(t)}^x) \vDash \varphi$

# 完全性定理

# 完全性定理

## 定理 (完全性定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ .  $\Gamma$  是  $\mathcal{L}$  公式集,  $\varphi$  是  $\mathcal{L}$  公式, 则

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

也即, 对任意公式集  $\Sigma$ , 如果  $\Sigma$  一致, 那么  $\Sigma$  可满足

# 完全性定理

## 定理 (完全性定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ .  $\Gamma$  是  $\mathcal{L}$  公式集,  $\varphi$  是  $\mathcal{L}$  公式, 则

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

也即, 对任意公式集  $\Sigma$ , 如果  $\Sigma$  一致, 那么  $\Sigma$  可满足

# 完全性定理

证明思路：给定一致的  $\mathcal{L}$  公式集  $\Sigma$ ，我们要构造一个它的  $\mathcal{L}$  模型  $\mathfrak{A}$  以及赋值  $s$ ：

- 将  $\Sigma$  扩张为一个极大一致集  $\Delta$ ，以获得足够多的信息
- 将  $\mathcal{L}$  中的所有项作为论域中元素
- 变元、常数符号、函数符号解释依据项本身的构造
- 关系依据  $\Delta$  中原子公式的提示
- 证明  $(\mathfrak{A}, s) \models \Delta$ ，即对任意  $\varphi$ ， $\varphi \in \Delta \Rightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

# 完全性定理

证明思路：给定一致的  $\mathcal{L}$  公式集  $\Sigma$ ，我们要构造一个它的  $\mathcal{L}$  模型  $\mathfrak{A}$  以及赋值  $s$ ：

- 将  $\Sigma$  扩张为一个极大一致集  $\Delta$ ，以获得足够多的信息
- 将  $\mathcal{L}$  中的所有项作为论域中元素
- 变元、常数符号、函数符号解释依据项本身的构造
- 关系依据  $\Delta$  中原子公式的提示
- 证明  $(\mathfrak{A}, s) \models \Delta$ ，即对任意  $\varphi, \varphi \in \Delta \Rightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \varphi$



# 完全性定理

难点:

- 否定式:  $\neg\beta$

假设  $\neg\alpha \in \Delta$ , 要证明  $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\alpha$ , 需要有

“ $\alpha \notin \Delta \Rightarrow (\mathfrak{A}, s) \not\models \alpha$ ” 作为归纳假设。因此, 我们需要

证明更强的命题:  $\varphi \in \Delta \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

- 等式:  $t_1 \approx t_2$

如果对任意项  $t$ ,  $\bar{s}(t) = t$ , 那么对不同的项  $t_1, t_2$ , 有

$(\mathfrak{A}, s) \not\models t_1 \approx t_2$ , 但可能同时也有  $t_1 \approx t_2 \in \Delta$

# 完全性定理

难点:

- 否定式:  $\neg\beta$

假设  $\neg\alpha \in \Delta$ , 要证明  $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\alpha$ , 需要有

“ $\alpha \notin \Delta \Rightarrow (\mathfrak{A}, s) \not\models \alpha$ ” 作为归纳假设。因此, 我们需要

证明更强的命题:  $\varphi \in \Delta \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, s) \models \varphi$

- 等式:  $t_1 \approx t_2$

如果对任意项  $t$ ,  $\bar{s}(t) = t$ , 那么对不同的项  $t_1, t_2$ , 有

$(\mathfrak{A}, s) \not\models t_1 \approx t_2$ , 但可能同时也有  $t_1 \approx t_2 \in \Delta$

# 完全性定理

难点:

- 全称式:  $\forall x\beta$

假设  $(\mathcal{A}, s) \models \forall x\beta$ , 为了证明  $\forall x\beta \in \Delta$ , 我们需要证明  $(\neg\forall x\beta) \notin \Delta$ 。但由  $\models \forall x\beta \rightarrow \beta_i^x$ , 我们最多得到  $\beta_i^x \in \Delta$ , 从而  $\neg\beta_i^x \notin \Delta$

解决思路: 我们事先在  $\Delta$  中加入一些诸如

$$\neg\forall x\beta \rightarrow \neg\beta_i^x$$

的公式

# 完全性定理

难点:

- 全称式:  $\forall x\beta$

假设  $(\mathcal{A}, s) \models \forall x\beta$ , 为了证明  $\forall x\beta \in \Delta$ , 我们需要证明  $(\neg\forall x\beta) \notin \Delta$ 。但由  $\models \forall x\beta \rightarrow \beta_t^x$ , 我们最多得到  $\beta_t^x \in \Delta$ , 从而  $\neg\beta_t^x \notin \Delta$

解决思路: 我们事先在  $\Delta$  中加入一些诸如

$$\neg\forall x\beta \rightarrow \neg\beta_t^x$$

的公式

# 完全性定理

给定语言  $\mathcal{L}$  和一致的公式集  $\Sigma$ 。

首先，我们在语言中添加可数无穷多个新的常数符号

$C = \{c_0, c_1, \dots\}$ , 令  $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup C$

由于语言改变了， $\Sigma$  在新的语言中能证明的公式多了。我们要证明  $\Sigma$  在新的语言中仍然是一致的。

定理 (常数概括定理)

假设  $\Gamma \vdash \varphi$ , 且常数符号  $c$  不在  $\Gamma$  中出现, 则存在不在  $\varphi$  中出现的变元  $y$ , 使得  $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$  且推演中不出现  $c$

# 完全性定理

给定语言  $\mathcal{L}$  和一致的公式集  $\Sigma$ 。

首先，我们在语言中添加可数无穷多个新的常数符号

$C = \{c_0, c_1, \dots\}$ , 令  $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup C$

由于语言改变了， $\Sigma$  在新的语言中能证明的公式多了。我们要证明  $\Sigma$  在新的语言中仍然是一致的。

定理 (常数概括定理)

假设  $\Gamma \vdash \varphi$ , 且常数符号  $c$  不在  $\Gamma$  中出现, 则存在不在  $\varphi$  中出现的变元  $y$ , 使得  $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$  且推演中不出现  $c$

# 完全性定理

其次, 对每一对  $\mathcal{L}_c$  中公式  $\varphi$  和变元  $x$  的组合, 添加一条 **亨金公理** :

$$\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x$$

其中, 每个  $c$  对应唯一一组  $(\varphi, x)$ , 且不在所对应的  $\varphi$  中出现 (否则可能导致不一致, 例如  $\varphi$  是  $x \neq c$ )

# 完全性定理

添加亨金公理的做法:

- 枚举有序对  $(\varphi, x)$ :  $\{(\varphi_1, x_1), (\varphi_2, x_2), \dots\}$

注意: 对  $i \neq j$ , 可能  $\varphi_i = \varphi_j$  或  $x_i = x_j$

- 令  $\theta_k = (\neg \forall x_k \varphi_k \rightarrow \neg(\varphi_k)_{c_{i_k}}^{x_k})$

其中,  $c_{i_k}$  是  $\{c_0, c_1, \dots\}$  枚举中, 第一个不在任何已定义的  $\theta_i$  ( $i < k$ ) 和  $\varphi_k$  中出现的常数符号

- 令  $\Theta = \{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$



# 完全性定理

我们需要证明，添加亨金公理后， $\Sigma \cup \theta$  仍然是一致的：反设存在最小的  $m$ ，使得  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m+1}\}$  不一致，

- 则  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg \theta_{m+1}$

假设  $\theta_{m+1} = \neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x$

- 则有  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg \forall x \varphi$  以及  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

[因为  $(\neg(\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x) \rightarrow \neg \forall x \varphi)^P$  和

$(\neg(\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x) \rightarrow \varphi_c^x)^P$  都是重言式]

- 由常数概括定理， $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \forall x \varphi$

# 完全性定理

我们需要证明, 添加亨金公理后,  $\Sigma \cup \theta$  仍然是一致的: 反设存在最小的  $m$ , 使得  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m+1}\}$  不一致,

- 则  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

假设  $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x$

- 则有  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$  以及  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

[因为  $(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \rightarrow \neg\forall x\varphi)^P$  和

$(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \rightarrow \varphi_c^x)^P$  都是重言式]

- 由常数概括定理,  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

# 完全性定理

我们需要证明, 添加亨金公理后,  $\Sigma \cup \theta$  仍然是一致的: 反设存在最小的  $m$ , 使得  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m+1}\}$  不一致,

- 则  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

假设  $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x$

- 则有  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$  以及  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

[因为  $(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \rightarrow \neg\forall x\varphi)^P$  和

$(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \rightarrow \varphi_c^x)^P$  都是重言式]

- 由**常数概括定理**,  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

# 完全性定理

我们需要证明，添加亨金公理后， $\Sigma \cup \theta$  仍然是一致的：反设存在最小的  $m$ ，使得  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m+1}\}$  不一致，

- 则  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$

假设  $\theta_{m+1} = \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x$

- 则有  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$  以及  $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

[因为  $(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \rightarrow \neg\forall x\varphi)^P$  和

$(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi_c^x) \rightarrow \varphi_c^x)^P$  都是重言式]

- 由常数概括定理， $\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

# 完全性定理

将一致的公式集  $\Sigma \cup \Theta$  扩张为极大一致集  $\Delta$

极大一致集性质: 对任意公式  $\varphi$

- 或者  $\varphi \in \Delta$ , 或者  $\neg\varphi \in \Delta$
- 若  $\Delta \vdash \varphi$ , 则  $\varphi \in \Delta$

# 完全性定理

运用极大一致集  $\Delta$  丰富的信息, 构造一个它的模型  $\mathfrak{M}$ :

- 令  $\mathcal{T}$  是语言  $\mathcal{L}_C$  中所有项的集合。定义

$$|\mathfrak{M}| = \mathcal{T}/E = \{ [t]_E \mid t \in \mathcal{T} \}$$

其中,  $E$  是  $\mathcal{T}$  上的二元关系, 定义如下:

$$(t_1, t_2) \in E \Leftrightarrow t_1 \approx t_2 \in \Delta$$

需要证明:  $E$  是等价关系

# 完全性定理

回顾:

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

# 完全性定理

- 对  $n$  元谓词符号  $P$ , 定义  $P^{\mathfrak{M}}$  为  $\mathfrak{M}$  上  $n$  元关系:

$$([t_1]_E, \dots, [t_n]_E) \in P^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow Pt_1 \dots t_n \in \Delta$$

需要证明: 若  $(t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n) \in E$ , 则

$$Pt_1 \dots t_n \in \Delta \Leftrightarrow Pu_1 \dots u_n \in \Delta$$

考虑:

$$\begin{aligned} \text{(Eq4)} \quad & \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ & Px_1 \dots x_n \rightarrow Py_1 \dots y_n) \end{aligned}$$



# 完全性定理

- 对  $n$  元函数符号  $f$ , 定义  $f^{\mathfrak{M}}$  为  $\mathfrak{M}$  上  $n$  元函数:

$$f^{\mathfrak{M}}([t_1]_E, \dots, [t_n]_E) = [ft_1 \dots f_n]_E$$

需要证明: 若  $(t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n) \in E$ , 则

$$(ft_1 \dots t_n, fu_1 \dots u_n) \in E$$

考虑:

$$\begin{aligned} \text{(Eq5)} \quad & \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ & fx_1 \dots x_n \approx fy_1 \dots y_n) \end{aligned}$$

# 完全性定理

- 对  $\mathcal{L}_C$  中的常数符号  $c$ , 令  $c^{\mathfrak{A}} = [c]_E$

以上, 完成了对  $\mathfrak{A}$  的构造。

还需定义  $\mathfrak{A}$  赋值  $s : V \rightarrow |\mathfrak{A}|$ :

$$s(x) = [x]_E$$

# 完全性定理

我们证明: 对任何  $\mathcal{L}$  公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$$

对公式  $\alpha$  归纳:

- $\alpha = t_1 \approx t_2$

# 完全性定理

我们证明: 对任何  $\mathcal{L}$  公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$$

对公式  $\alpha$  归纳:

- $\alpha = Pt_1 \dots t_n$

# 完全性定理

我们证明: 对任何  $\mathcal{L}$  公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$$

对公式  $\alpha$  归纳:

- $\alpha = \neg\beta$

# 完全性定理

我们证明: 对任何  $\mathcal{L}$  公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$$

对公式  $\alpha$  归纳:

- $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$

# 完全性定理

我们证明: 对任何  $\mathcal{L}$  公式,

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \Delta$$

对公式  $\alpha$  归纳:

- $\alpha = \forall x\beta$

# 完全性定理

因此,  $(\mathfrak{A}, s) \models \Delta$ , 由于  $\Sigma \subset \Delta$ ,  $(\mathfrak{A}, s) \models \Sigma$

注意:

我们需要证明的是,  $\Sigma$  作为一个  $\mathcal{L}$ -公式集是可满足的。

对此, 只需把  $\mathfrak{A}$  限制在  $\mathcal{L}$  上, 它就是一个满足  $\Sigma$  的  $\mathcal{L}$ -结构



# 紧致性定理及其应用

## 定理 (紧致性定理)

给定语言  $\mathcal{L}$ ,  $\Gamma$  是一集  $\mathcal{L}$  公式。那么  $\Gamma$  是可满足的当且仅当它的每个有穷子集是可满足的。

证明.

# 紧致性定理及其应用

## 定理

给定含有等词的语言  $\mathcal{L}$ ,  $\Sigma$  是  $\mathcal{L}$  的一个闭语句集。假设它有任意大的有穷模型, 那么它就有无穷模型。

## 推论

给定含有等词的语言  $\mathcal{L}$ 。所有有穷  $\mathcal{L}$  结构组成的类不是广义初等类, 所有无穷结构组成的类不是初等类。

# 紧致性定理及其应用

类似地：

## 定理

- 所有 Torsion 群组成的类不是广义初等类
- 所有 Torsion-free 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 0 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句  $\sigma$ ，如果它在所有特征 0 的域中成立，那么它也在某个特征  $p$  的域中成立

.....

# 紧致性定理及其应用

存在非标准的算术模型

## 定理

令  $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$  是标准算术模型。那么存在一个非标准算术模型  $\mathfrak{N}^*$ ,  $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^*$  且  $\mathfrak{N}^*$  含有“无穷”（非标准）自然数

# 习题

无