数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

前情提要

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α'（形如 $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\beta$），使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前情提要

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α' (形如 $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \beta$)，使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前情提要

证明前束范式定理用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前情提要

一阶逻辑的语义

- 语言 $\mathcal{L}$ 中参数符号的语义——$\mathcal{L}$ 结构
- 自由变元的语义——赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$
- 项的语义——由 $\mathfrak{A}$ 和 s 唯一决定的 $\bar{s} : \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \to |\mathfrak{A}|$
- 公式的语义——满足关系：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

一阶逻辑的语义

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$-赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中 自由出现 的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

证明.

- 对项 t 归纳证明： $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$
- 对公式 φ 归纳证明引理

约定

- 我们用 $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1,\ldots,x_n$
- 对 $\varphi(x_1,\ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1,\ldots,d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$，其中 $s(x_i) = d_i$ $(1 \leq i \leq n)$

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathcal{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ **逻辑蕴含** φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对**任意** $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和**任意** $\mathfrak{A}$-赋值 s 都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$ ），那么 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示 **满足** 关系和 **逻辑蕴涵** 关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$；$\alpha \vDash\Dashv \beta$ （ **逻辑等效** ）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （ **逻辑有效** ）

可定义性

Berry paradox

”the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words”

Berry paradox

"the smallest positive integer not definable in fewer than twelve words"

结构内的可定义性

定义

给定语言 $\mathcal{L}$，$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 以及 $\mathcal{L}$ 中公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$，我们称 φ 在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义了（$|\mathfrak{A}|$ 上的）k- 元关系 R ，当且仅当

$$R = \{(a_1, \ldots, a_k) \in |\mathfrak{A}|^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]\}$$

我们称一个 k-元关系 $R \subset |\mathfrak{A}|^k$ 是 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 中可定义的，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 公式在结构 $\mathfrak{A}$ 中定义它

结构内的可定义性

例

考虑只含有一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，以及 $\mathcal{L}$ 结构 $(\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c)\})$，如图

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

- $\{a, b, c\}$ 的哪些子集是可定义的?
- 哪些 $\{a, b, c\}$ 上的二元关系是可定义的?

结构内的可定义性

例

考察关于数论的语言 $\mathcal{L} = \{0, S, +, \cdot\}$。令 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{N}$ 的论域为自然数集 $\mathbb{N}$，其他的符号都按照通常的解释，则

- 序关系 $\{(m,n) \mid m < n\}$ 在 $\mathfrak{N}$ 中是可定义的
- 对每一个自然数 n，单点集 $\{n\}$ 都是 $\mathfrak{N}$ 中可定义的
- 所有素数的集合在 $\mathfrak{N}$ 中是可定义的

思考：有否不可定义的自然数的子集？能不能举出例子？

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。令 Σ 是 $\mathcal{L}$ 闭语句集。我们称

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ 是 } \mathcal{L} \text{ 结构且，} \mathfrak{A} \models \Sigma\}$$

是 Σ 所定义的 $\mathcal{L}$ 结构类 （所有 Σ 的模型组成的类）

若 $\Sigma = \{\tau\}$，我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\mathrm{Mod}\,\tau$

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。令 Σ 是 $\mathcal{L}$ 闭语句集。我们称

$$\mathrm{Mod}\,\Sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}\text{ 是 }\mathcal{L}\text{ 结构且，}\mathfrak{A} \models \Sigma\}$$

是 Σ 所定义的 $\mathcal{L}$ 结构类 （所有 Σ 的模型组成的类）

若 $\Sigma = \{\tau\}$，我们记 $\{\tau\}$ 所定义的结构类为 $\mathrm{Mod}\,\tau$

定义结构类

定义

给定语言 $\mathcal{L}$,

- 我们称一个 $\mathcal{L}$ 结构类 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{L}$-初等类 （elementary class)，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句 τ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\tau$
- 我们称 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{L}$-广义初等类，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}$ 闭语句集 Σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$

广义初等类与初等类到底有何区别?

定义结构类

例

令语言 $\mathcal{L}$ 只含有等词。

- 语句 ε_2 : $\exists x \exists y (x \not\approx y)$ 定义的 $\mathcal{L}$-结构类是什么？
- 所有含有 2-4 个元素的集合组成的类是 $\mathcal{L}$-初等类？
- 所有无穷集合组成的类是不是 $\mathcal{L}$-广义初等类？ 是不是初等类？

定义结构类

例

考虑含有等词和一个二元谓词符号的语言 $\mathcal{L} = \{R\}$

- 令 $\tau_1 = \forall x Rxx$, $\tau_2 = \forall x \forall y \forall z (Rxy \to Ryz \to Rxz)$,

  $\mathrm{Mod}\{\tau_1, \tau_2\}$ 是什么?
- 给出定义偏序类、全序类的闭语句（集）
- 给出定义等价关系的闭语句（集）

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, ^{-1}. e\}$，则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x\ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x\ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 群 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类？ 无扭的阿贝尔群 呢？

定义结构类

例

群论语言 $\mathcal{L} = \{\approx, \circ, {}^{-1}. e\}$，则下列闭语句

$$\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x\ (x \circ e \approx e \circ x \approx x)$$

$$\forall x\ (x \circ x^{-1} \approx x^{-1} \circ x \approx e)$$

定义了 群 这个初等类

阿贝尔群 是不是初等类？ 无扭的阿贝尔群 呢？

以上，我们给出了结构中 可定义 的严格定义，意味着我们可以证明形如“XXX 是不可定义的”的命题了。

同态与同构

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 函数符号 f，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 常数符号 c，有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢?

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态

- 如果同态 h 是 **单射** 的，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 **嵌入** （embedding）；
- 如果 h 是双射（既是单射，又是满射），我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 **同构** （isomorphism）。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

下期预告

- 同态定理及其推论
- 证明“不可定义”
- 一阶逻辑的可靠性定理

习题

- 5.1.2 - 5.1.6
- 5.2.2, 5.2.3, 5.2.4