

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 概括定理
- 重言规则
- 演绎定理
- 逆否命题
- 反证法

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$, 且常数符号 c 不在 Γ 中出现, 则存在不在 φ 中出现的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

证明.

假设 $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$. 取 y 不在任何 α_i ($i \leq n$) 中出现。对 $i \leq n$ 归纳证明存在不含 c 的推演序列见证

$$\Gamma \vdash \forall y (\alpha_i)_y^c$$

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现, 则变元 x 可以无冲突地替换 φ_y^x 中的 y , 并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

证明.

习题

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现, 则变元 x 可以无冲突地替换 φ_y^x 中的 y , 并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

证明.

习题

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现, 则变元 x 可以无冲突地替换 φ_y^x 中的 y , 并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

证明.

习题

“高一阶逻辑”的元定理

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi_c^x$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现, 则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$, 且存在一个不出现 c 的推演见证。

证明.

- 根据常数概括: 存在新的 y , 使得 $\Gamma \vdash \forall y(\varphi_c^x)_y^c$

其中, $(\varphi_c^x)_y^c = \varphi_y^x$

- 根据循环替换引理和概括定理证明: $\forall y\varphi_y^x \vdash \forall x\varphi$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (约束变元替换定理)

φ 是公式, t 是项, x 是变元。我们总可以找到一个公式 φ' , 使得

- φ' 和 φ 的区别仅在约束变元的选择 (可以没有区别)
- $\varphi \vdash \varphi'$
- t 可以无冲突地替换 φ' 中的 x

证明.

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$$\vdash \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$$\vdash \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$, 只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 Γ 中自由出现, 我们找一个“全新”的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$, 从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$, 而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$, 只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 Γ 中自由出现, 我们找一个“全新”的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$, 从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$, 而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$, 只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x\psi$
 - 如果 x 不在 Γ 中自由出现, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 如果 x 在 Γ 中自由出现, 我们找一个“全新”的变元 y , 使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$, 从而有 $\Gamma \vdash \forall y\psi_y^x$, 而 $\forall y\psi_y^x \vdash \forall x\psi$

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况:
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况:
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况:
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况:
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$, 分情况:
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$, 只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
 - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$, 尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$, (并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

以上策略可以应付几乎所有作业，是否能应付所有情况呢？
问题出在哪儿呢？

关于等词的元定理

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

关于等词的元定理

$$(Eq1) \vdash \forall x x \approx x$$

$$(Eq2) \vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

$$(Eq3) \vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

$$(Eq4) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ P x_1 \dots x_n \rightarrow P y_1 \dots y_n)$$

$$(Eq5) \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow \\ f x_1 \dots x_n \approx f y_1 \dots y_n)$$

习题

■ 4.2.4, 4.2.5

■ 4.3.1, 4.3.4

■ 证明 (Eq3) - (Eq5) 是一阶逻辑公理系统中可证的

4.3.4 改为: 证明: 假定公式 φ' 是由把公式 φ 中的某个子公式 ψ 替换成 ψ' 而得到的。如果 $\vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, 则

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'.$$

下期预告

- 前束范式
- 一阶逻辑的语义 (塔斯基真定义)