数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语言
  - 符号（$\mathcal{S}$）：命题符号（$\mathcal{A}$），联词，辅助符号
  - 表达式（$\mathcal{E}$）
  - 合式公式（$\mathcal{F}$）
- 合式公式的递归定义与归纳证明

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

经典命题逻辑的希尔伯特系统

真即被证明

——数学直觉主义

什么是证明

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- 公式的简写

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- α, β, γ 是元语言符号，指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- 因此，有无穷条公理。

希尔伯特系统的命题逻辑公理

(A1) $\alpha \to \beta \to \alpha$

(A2) $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

(A3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\neg\beta \to \alpha) \to \beta$

注意

- 但我们能机械地判定一个表达式是不是公理（why?）

希尔伯特系统的推理规则

分离规则（*modus ponens*,MP）:

从 $\alpha, \alpha \to \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的证明

定义 (推演/证明/演绎（deduction）)

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个 **推演** （或 **证明** 或 **演绎** ）是一个**有穷的公式序列** $\langle\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$，满足 $\alpha_n = \varphi$，并且对所有 $i \leq n$，或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$；或者

(b) 存在 $j, k < i$, 使得 $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个 定理 （记 $\Gamma \vdash \alpha$ ），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个 定理 （记 $\Gamma \vdash \alpha$ ），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$ ，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个 定理 （记 $\Gamma \vdash \alpha$ ），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$ ，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个 定理 （记 $\Gamma \vdash \alpha$ ），当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$ ，当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0，有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有，$\vdash \alpha \to \alpha$

证明.

对每个公式 α，有如下推演：

1. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
2. $\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$
5. $\alpha \to \alpha$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

($\Leftarrow$)

($\Rightarrow$)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

($\Leftarrow$)

($\Rightarrow$)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$，当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

证明.

把已有的推演改造成我们想要的推演

$(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$

一些元定理

定义

称公式集 Σ 是 **不一致的** （inconsistent），如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 **一致的** ，当且仅当它不是不一致的

注意:

“不一致”是个断言“存在证明”的性质,“一致”相反

引理

- Σ 是不一致的,当且仅当对任意公式 β 有,$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$,当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

习题

- 2.4.1*, 2.4.2, 2.4.4*
- 2.6.1, 2.6.2
- 2.8.2

下期预告

- 命题逻辑的语义：真值指派
- 命题联词的语义与布尔函数