数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

前情提要

- 自然数上的归纳法与递归定义
- 函数
- 枚举与集合大小

命题逻辑

命题逻辑

回顾: 我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题"并非 A"和"A 并且 B"的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如："并非"、"并且"、"或者"、"蕴含"……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非 A”和“A 并且 B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾：我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题“并非 A”和“A 并且 B”的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含”……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑

回顾: 我们之前假设，如果能谈论命题 A 和命题 B 的真假，我们应该也能谈论命题 “并非 A” 和 “A 并且 B” 的真假。

- 命题联词可以连接较简单的命题形成较复杂的命题，如：“并非”、“并且”、“或者”、“蕴含” ……
- 命题逻辑只考虑有关命题联词的真之规律
- 命题逻辑是一阶谓词逻辑的片段（热身）

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 无穷可枚举多个 命题符号 ： $A_0, A_1, A_2, \ldots$

  定义 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots\}$

- 联词 ： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- 辅助符号 ： $(,)$

  定义 $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \}$

注意: 符号是任意指定的数学对象，可以是自然数或集合，满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义

命题逻辑的语言

语言的基本构件：符号

- 无穷可枚举多个 命题符号 ： $A_0, A_1, A_2, \ldots$

  定义 $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots\}$

- 联词 ： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- 辅助符号 ： $(,)$

  定义 $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \}$

注意:符号是任意指定的数学对象，可以是自然数或集合，满足一些条件（以便不产生混淆），本身没有任何意义

命题逻辑的语言

定义 (表达式（expression）)

我们称由命题逻辑符号（即 $\mathcal{S}$ 中元素）组成的有穷长度的符号序列（即符号串）为命题逻辑语言的 **表达式** 。定义

$$\mathcal{E} = \{s \mid \text{存在 } n \in \mathbb{N} \text{ 使得 } s : n \to \mathcal{S}\}$$

即所有表达式组成的集合。

命题逻辑的语言

约定

我们用，例如，$(A_0 \vee A_1)$ 作为序列 $\langle (, A_0, \vee, A_1,) \rangle$ 的缩写。
而 A_i 作为表达式是 $\langle A_i \rangle$ 的缩写

例 (表达式)

- $(A_0 \vee A_1)$
- $(A_0 \vee$

注意: 不是所有表达式都能构成合乎语法规则的命题

命题逻辑的语言

定义 (合式公式（well-founded formula）)

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式，那么
  $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

定义 (合式公式（well-founded formula）)

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式，那么
  $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

定义 (合式公式（well-founded formula）)

- 每个命题符号 A_i 都是 合式公式
- 若 α, β 是合式公式，那么
  $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ 也是 合式公式
- 除此以外都不是合式公式

命题逻辑的语言

约定

例如，$(\alpha \to \beta)$ 表示 $\langle(\rangle * \alpha * \langle\to\rangle * \beta * \langle)\rangle$

关于合式公式的定义

- 元语言与对象语言
- 上述定义是一种递归定义

命题逻辑的语言

递归定义

- 递归定义不是循环定义
  - 自上而下

    $$\mathcal{F}^* = \bigcap \{X \mid X \text{ 包涵所有命题变元且在复合命题构造下封闭}\}$$

  - 自下而上
    - $F_0 = \{A_0, A_1, \ldots\}$
    - $F_{n+1} = F_n \cup \{(\neg\alpha) \mid \alpha \in F_n\}$
      $\cup\{(\alpha \star \beta) \mid \alpha, \beta \in F_n \text{ 且 } \star = \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
    - $\mathcal{F}_* = \bigcup_n F_n$

命题逻辑的语言

事实

$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$ （证明稍后）

记法

令 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$

- 自下而上定义的好处在于展现了每个合式公式的构造过程
- 自上而下的定义告诉我们可以运用归纳原理

命题逻辑的语言

当我们要证明诸如“所有合式公式都有某性质”时，我们往往要运用：

定理 (关于命题逻辑合式公式的归纳原理)

令 P 是一个关于合适公式的性质。若下述 (1)、(2) 成立，则所有合适公式 α 都有 P 性质，记 $P(\alpha)$

(1) 对所有命题符号 A_i，$P(A_i)$

(2) 对所有合式公式 α, β，若 $P(\alpha)$ 且 $P(\beta)$，则 $P((\neg\alpha))$ 且 $P(\alpha \star \beta)$ (注：$\star$ 可以是 $\vee, \wedge, \rightarrow$ 或 $\leftrightarrow$)

命题逻辑的语言

关于命题逻辑合式公式的归纳原理（定理）来源于自然数上的归纳原理。

取自然数的性质 P' 为：$P'(n)$，当且仅当所有 F_n 中的公式 α 有 $P(\alpha)$，关于合式公式的归纳原理就成了自然数上的归纳原理的一个特例。

证明: $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_*$

命题逻辑的语言

归纳原理的一个应用

定理

- 每个合式公式中左右括号的数目相同。且每一合式公式 真前段 中左括号多于右括号。因此，合式公式的真前段一定不是合式公式。
- 没有合式公式是以 $\neg$ 开头的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α，下列叙述有且仅有一条适用

(1) α 是一个命题符号。

(2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。

(3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式，$\star$ 为某个二元联词。

不仅如此，在情形 (2) 和 (3) 中，公式 α_0，α_1 和 α_2 还有二元联词 $\star$ 都是唯一的。

习题

- 令 $s : n \to \mathcal{A}$、$t : m \to \mathcal{A}$，尝试给出两个有穷序列的连接 $s * t$ 的定义
- 2.2.5 (给出证明)、2.2.8 （构造序列定义见教材)、2.2.9

下期预告

经典命题逻辑的希尔伯特公理系统