

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2019 年秋季

# 课程信息

- 时间地点:

- 周五 9:55 - 11:35, HGX208 (讲座课)

- 周二 18:30-20:10, HGX304 (习题课、讲座课)

- 网站:

<https://aplacenearby.ggr.fun/mathlogic2019>

- 教材:《数理逻辑:证明及其限度》(第二版), 复旦大学出版社

# 课程团队

- 杨睿之

邮箱: [yangruizhi@fudan.edu.cn](mailto:yangruizhi@fudan.edu.cn)

- 侯诚诚

邮箱: [19210160029@fudan.edu.cn](mailto:19210160029@fudan.edu.cn)

- 刘桢

邮箱: [19210160030@fudan.edu.cn](mailto:19210160030@fudan.edu.cn)

- 孙德天

邮箱: [19210160031@fudan.edu.cn](mailto:19210160031@fudan.edu.cn)

# 前情提要

- 逻辑是关于真的一些普遍的规律
- 逻辑即数理逻辑，即数学的逻辑以及数学化的逻辑
- 我们都有具备逻辑思考的能力，那我们又能从这门课学到什么？

# 本学期我们要做的

- 练习阅读数学定义、定理、证明，撰写数学证明
- 严格地定义什么是定义、什么是真、什么是证明

# 本学期我们要做的

用数学的方法研究数学的逻辑

# 作为基础的集合论

- 集合论基于人们关于“集合”概念的直观
- 集合论被广泛接受为当代数学的基础
- 我们将首先在集合论的语言下讲述数理逻辑

# 直观中的集合

- 一些东西聚在一起组成一个集合
- 若  $a$  是集合  $X$  中的对象, 我们称  $a$  是  $X$  的**元素**, 或  $a$  **属于**  $X$ , 记作  $a \in X$



# 直观中的集合

## 例

- { 侯诚诚、刘桢、孙德天 }
- $\{p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教} \}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作  $\emptyset$

# 直观中的集合

## 例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教} \}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作  $\emptyset$

# 直观中的集合

## 例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教}\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作  $\emptyset$

# 直观中的集合

## 例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{x \mid \varphi(x)\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作  $\emptyset$

# 直观中的集合

## 例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{x \mid \varphi(x)\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作  $\emptyset$

# 直观中的集合

- 集合是无关排序的

例

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$$

- 对象在集合的**描述**中出现的次数与集合本身无关

例

$$\{a, a, b\} = \{a, b, b\} = \{a, b\}$$

# 直观中的集合

集合的外延原理 (principle of extensionality)

任给集合  $A, B$ ,  $A = B$  当且仅当  $A$  和  $B$  有相同的元素。

例

- $\{ \text{侯诚诚、刘桢、孙德天} \}$   
 $= \{ p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教} \}$
- 空集是唯一的

# 直观中的集合

## 例

一些重要的集合：

- 布尔值集  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- 自然数集  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- 整数集  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- 有理数集  $\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in \mathbb{Z} \ \& \ n \in \mathbb{N} \ \& \ n \neq 0\}$
- 实数集  $\mathbb{R}$



# 集合

## 定义 (子集)

给定集合  $A, B$ 。我们称  $A$  是  $B$  的子集，记作  $A \subset B$ ，当且仅当任何  $A$  中的元素都是  $B$  中的元素。

## 例

- $\{p \mid p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教} \}$   
 $\subset \{p \mid p \text{ 是 PHIL130175h.01 课程团队成员} \}$
- $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

# 集合

## 事实

- 对任意集合  $A, B$ ,  $A = B$  当且仅当  $A \subset B$  且  $B \subset A$ 。
- 空集是任何集合的子集

## 定义 (真子集)

我们称  $A$  是  $B$  的 **真子集**, 记作  $A \subsetneq B$ , 当且仅当  $A \subset B$  且  $A \neq B$ 。

# 集合

## 定义 (幂集)

集合  $X$  的 **幂集** (记作  $P(X)$ ) 是它所有子集组成的集合。

## 例

列出  $P(\{a, b, c\})$  的所有元素

# 集合

## 定义 (并、交、差)

给定集合  $A, B$ , 我们定义

- $A$  和  $B$  的 **并**,  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
- $A$  和  $B$  的 **交**,  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
- $A$  和  $B$  的 **差**,  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 而 } x \notin B\}$

# 集合

## 例

- $\{a, b, c\} \cup \{b, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{b, d\} = \{b\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b, c\}$

# 集合

例

- $\{a, b, c\} \cap \{d\} = \emptyset$

若  $A \cap B = \emptyset$ , 我们称  $A$  与  $B$  不交。

# 集合

## 记法

- 如果集合  $\mathcal{F}$  中元素都是集合, 我们又称  $\mathcal{F}$  为 **集合族**。
- 有时我们会记  $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$ , 其中  $I$  是一个 **下标集**。

常见的下标集有  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{N}$

## 例

$\{a_i \mid i < n\}$ ,  $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$

# 集合

令  $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , 则  $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = ((X_1 \cup X_2) \cup X_3)$ 。

定义 (一般并、一般交)

- $\cup \mathcal{F} = \{x \mid \text{存在 } X \in \mathcal{F} \text{ 使得 } x \in X\}$
- 对  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ,  
 $\cap \mathcal{F} = \{x \mid \text{对所有 } X \in \mathcal{F} \text{ 都有 } x \in X\}$



# 集合

令  $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$ , 则  $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = ((X_1 \cup X_2) \cup X_3)$ 。

定义 (一般并、一般交)

- $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \text{存在 } X \in \mathcal{F} \text{ 使得 } x \in X\}$
- 对  $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ,  
 $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \text{对所有 } X \in \mathcal{F} \text{ 都有 } x \in X\}$

# 集合

## 记法

令  $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$ , 记

- $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup \mathcal{F}$
- $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \mathcal{F} \quad (I \neq \emptyset)$

# 集合

例

令  $X_i = \{n + i \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \geq 3\}$ , 那么

■  $\cup \mathcal{F} = ?$

■  $\cap \mathcal{F} = ?$

# 关系

## 例 (关系)

- 朋友 / 把.....当作朋友
- 相邻
- 序 (大小)
- 整除
- 相等

# 关系

## 记法

我们用  $(a, b)$  表示由  $a, b$  按  $a$  前  $b$  后组成的 **有序对**

有序对的直观: 与集合不同, 如果  $a \neq b$ , 我们希望有序对

$(a, b) \neq (b, a)$ 。更严格地, 任给  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , 我们要求

$(a_1, b_2) = (a_2, b_2)$ , 当且仅当  $a_1 = a_2$  且  $b_1 = b_2$

# 关系

## 定义 (卡氏积)

任给集合  $A, B$ , 定义 **卡氏积** (Cartesian product)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

我们记  $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

# 关系

## 定义

我们称  $R$  是  $A, B$  之间的一个 **二元关系**，当且仅当  $R \subset A \times B$ ；称  $R$  是  $A$  上的一个 **二元关系**，当且仅当  $R \subset A^2$ 。

## 记法

我们记  $Rab$  或  $aRb$ ，当且仅当  $(a, b) \in R$

# 关系

## 例

$\mathbb{N}$  上的二元关系:

- 等同关系  $\text{Id}_{\mathbb{N}} = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
- 严格小于关系  
 $\leq = \{(n, m) \mid n < m \ \& \ n, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), \dots\}$
- 整除关系  $\{(n, m) \mid n|m \ \& \ n, m \in \mathbb{N}\} = \{(n, m) \mid \text{存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } m = n * k\}$



# 关系

## 定义 (几个关系的性质)

- 关系  $R \subset A^2$  是 **自返的** , 当且仅当对任意  $a \in A$  有  $Raa$
- 关系  $R \subset A^2$  是 **传递的** , 当且仅当对任意  $a, b, c \in A$  有,  $Rab$  与  $Rbc$  蕴含  $Rac$
- 关系  $R \subset A^2$  是 **对称的** , 当且仅当对任意  $a, b \in A$  有,  $Rab$  蕴含  $Rba$
- 关系  $R \subset A^2$  是 **反对称的** , 当且仅当对任意  $a, b \in A$  有,  $Rab$  与  $Rba$  蕴含  $a = b$

# 关系

## 定义 (序)

令  $R \subset A^2$

- 若  $R$  是自反的、传递的, 我们称  $R$  是一个  $A$  上的 **准序** (preorder)
- 若准序  $R$  是反对称的, 则称  $R$  是一个  $A$  上的 **偏序** (partial order)
- 若偏序  $R$  满足对任意  $a, b \in A$  有  $aRb$  或  $bRa$ , 则称  $R$  是  $A$  上的一个 **全序** 或 **线序**

# 关系

## 例

- 整除关系 (习题)
- 考虑  $\mathbb{N}^2$  上的关系:  $(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2)$ , 当且仅当  $n_1 < n_2$ , 或  $n_1 = n_2$  且  $m_1 \leq m_2$

# 习题

- 1.2.3、1.2.4、1.3.2、1.3.3
- 证明：如果  $X \subset Y$ ，那么  $X \cup Y = Y$
- 举例： $R$  是对称的也是反对称的
- 验证：自然数集  $\mathbb{N}$  上的整除关系是偏序。整数集  $\mathbb{Z}$  上的整除关系呢？

# 下期预告

- 关系上的运算
- 等价关系与划分