抽屉原则

王世逸

2018 年 10 月 16 日

定理 1 (抽屉原则)**.** *如果自然数 $n > m$，则不存在从 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 到 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ 的单射。*

证明抽屉原则时最常见的错误是循环论证。比如从 $|n| \geq |m|$ 直接推出 $n \geq m$。虽然我们说 $|X|$ 可以直观地理解成 X 这个集合的大小，但我们没有严格地定义过它。对于有穷集 X，可以定义它的势 $|X|$ 是与 X 等势的最小的自然数。$\forall n \in \mathbb{N}(|n| = n)$ 并不是能从定义直接看出的事实，证明 $\forall n \in \mathbb{N}(|n| = n)$ 的工作量实际上和直接证明抽屉原则相当。

我们给出两位助教写的两个版本的证明，基本思路都是用归纳法，在归纳步中假设存在一个单射 f，利用 f 构造一个定义域或者值域更小的单射，然后用归纳假设推出矛盾。第一个证明对"鸽笼的数量"做归纳，第二个证明对"鸽子的数量"做归纳。

证明 1. 定义 $\varphi(m)$ 为：对任意 $n \in \mathbb{N}$，若 $n > m$，则不存在 $f : n \to m$ 使 f 为单射。归纳证明对任意 $m \in \mathbb{N}$，$\varphi(m)$ 成立。

- 证明 $\varphi(0)$ 成立

  任取 $n > 0$，假设存在 $f : n \to 0$ 是单射。那么 $f(0) \in \emptyset$，矛盾。

- 证明对任意 $m \in \mathbb{N}$，有 $\varphi(m) \to \varphi(m+1)$

  对任意 $m \in \mathbb{N}$，假设 $\varphi(m)$ 成立：对任意 $n_0 > m$，不存在 $f_0 : n_0 \to m$ 是单射（归纳假设）。

  任取 $n > m+1$，为了推出矛盾，反设存在 $f : n \to m+1$ 是单射。

  - 如果 $m \in \operatorname{ran}(f)$，那么存在 $x_0 \in n$ 使得 $f(x_0) = m$。
    * 如果 $x_0 = n-1$，把 $n-1$ 记作 n'，我们断言 $f{\restriction}n'$ 是从 n' 到 m 的单射。
      首先证明 $\operatorname{ran}(f{\restriction}n') \subseteq m$：对任意 $x \in n'$，因为 f 是单射且 $x \neq x_0$，所以有

      $$f{\restriction}n'(x) = f(x) \neq f(x_0) = m$$

      同时又有

      $$f(x) \in \operatorname{ran}(f) \subseteq m+1$$

所以

$$\operatorname{ran}(f\restriction n') \subseteq m+1 \setminus \{m\} = m$$

其次，因为任何单射限制在它的定义域的任意子集上还是一个单射，所以 $f\restriction n'$ 是单射。

因为 $n-1 > m$ 且 $f\restriction n'$ 是从 n' 到 m 的单射，与归纳假设矛盾。

* 如果 $x_0 < n-1$，我们定义一个新的函数 $g : n-1 \to m$ 使得对任意 $x \in n-1$，

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ f(n-1), & x = x_0 \end{cases}$$

我们断言 g 是从 $n-1$ 到 m 的单射。

首先还是证明 $\operatorname{ran}(g) \subseteq m$：对任意 $x \in n-1$，如果 $x \neq x_0$，那么由 f 是单射可以得到

$$g(x) = f(x) \neq f(x_0) = m$$

如果 $x = x_0$，那么由 $x_0 \neq n-1$ 和 f 是单射可以得到

$$g(x) = f(n-1) \neq f(x_0) = m$$

因此 $\operatorname{ran}(g) \subseteq m$。

其次证明 g 是单射：对任意 $x, y \in n-1$, 假设 $x \neq y$，如果 $x \neq x_0$ 且 $y \neq x_0$, 那么由 f 是单射可以得到

$$g(x) = f(x) \neq f(y) = g(y)$$

如果 $x \neq x_0$ 且 $y = x_0$，那么由 $x \neq n-1$ 和 f 是单射可以得到

$$g(x) = f(x) \neq f(n-1) = g(y)$$

$y \neq x_0$ 而 $x = x_0$ 的情况类似。因此 g 是从 $n-1$ 到 m 的单射，与归纳假设矛盾。

– 如果 $m \notin \operatorname{ran}(f)$，那么 $\operatorname{ran}(f) \subseteq m$，$f$ 是从 n 到 m 的单射，与归纳假设矛盾。

□

证明 *2.* 在 n 上做归纳。由于 $m < n$，故 $n \neq 0$。

归纳基础： 若 $n = 1$ 且 $m < 1$，则 $m = 0$，显然不存在 $f : n \to 0$ 是单射，因为 $n \times \emptyset = \emptyset$。

归纳步骤： 设 $n = k$ 时成立，即对任意 $m_0 < k$，不存在 $f : k \to m_0$ 是单射。我们证明 $k+1$ 时也成立。

设 $n = k+1$。对任意 $m < k+1$，或者 $m < k$，或者 $m = k$。若 $m < k$，反设存在 $f : k+1 \to m$ 是单射，则 $f\restriction k : k \to m$ 也是单射，与归纳假设矛盾。

若 $m = k$，我们证明不存在 $f : k+1 \to k$ 是单射。反设 $f_0 : k+1 \to k$ 是单射，则 $f_0 = f_0{\restriction}k \cup \{(k, f(k))\}$，由于 f_0 是单射，可知对任意 $i < k, f_0(i) \neq f_0(k)$，且 $f_0{\restriction}k$ 是单射。因此 $f_0{\restriction}k : k \to k \setminus \{f_0(k)\}$ 是单射，其中 $f_0(k) \in k$。

我们归纳证明对任意 $k \in \mathbb{N}$，如果 $a \in k$，那么存在 $k-1$ 到 $k - \{a\}$ 的双射。

归纳基础： 若 $k = 0$，则不存在 $a \in k$，因此平凡成立。

归纳步骤： 设 $k = n$ 时，若 $a \in n$，那么存在 $n-1$ 到 $n-\{a\}$ 的双射。我们证明 $k = n+1$ 时也成立。设 $a \in n+1$，那么 $a = n$ 或 $a < n$。

若 $a < n$，那么存在 $f : n-1 \to n-\{a\}$ 是双射。令 $g = f \cup \{(n-1, n)\}$，则 $g : n \to n+1-\{a\}$ 是双射。因此存在 $k-1$ 到 $k - \{a\}$ 的双射。

若 $a = n$，那么由于存在 $f : n+1 \to n+1$ 的双射 $f(x) = x$，因此 $f{\restriction}n : n+1-\{a\} \to n+1-\{a\}$ 是双射，即 $f : n+1-\{a\} \to n$ 是双射。因此存在 $k-1$ 到 $k-\{a\}$ 的双射。

因此，存在 $k \setminus \{f(k)\}$ 到 $k-1$ 的双射 h，因此存在 $h \circ f_0{\restriction}k : k \to k-1$ 是单射，与归纳假设矛盾。 $\square$