数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

前情提要

我们定义了两种“可定义”概念

- 结构内的可定义性: 给定结构
  - 关于该结构论域上的 k-元关系的性质
  - 由一个公式定义
- 定义结构类: 给定语言
  - 关于该语言的结构类的
  - 由一则闭语句定义（初等类）；由一集闭语句定义（广义初等类）

同态与同构

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 谓词符号 P，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 n 元 函数符号 f，和每组 $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$，有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

同态与同构

定义 (同态)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 为两个 $\mathcal{L}$ 结构。我们称函数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同态 （homomorphism），当且仅当它满足下述条件

- 对每个 常数符号 c，有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

同态与同构

直观上，同态保持两个结构对谓词符号、函数符号和常数符号的解释。

那么，什么时候算是也保持对等词和量词的解释呢？

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态

- 如果同态 h 是单射，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 嵌入 (embedding)；
- 如果 h 是双射 (既是单射，又是满射)，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同构 (isomorphism)。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

同态与同构

定义 (嵌入与同构)

令 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态

- 如果同态 h 是单射，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 嵌入 (embedding)；
- 如果 h 是双射 (既是单射，又是满射)，我们称 h 是一个从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的 同构 (isomorphism)。此时，我们称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构，记 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \models \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

定理 (同态定理)

给定语言 $\mathcal{L}$。假定 h 是从 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的同态，s 是 $\mathfrak{A}$ 赋值。则

1. 对任意项 t，$h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \Leftrightarrow (\mathfrak{B}, h \circ s) \vDash \alpha$$

3. 若 h 是单射，则 α 可含等词；若 h 是双射，可含量词

同态与同构

定义

如果 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|$ 是从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}$ 自身的一个同构，那么我们称 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的 自同构 （automorphism）

推论

令 h 是 $\mathfrak{A}$ 上的一个自同构，并且 $R \subset |\mathfrak{A}|^n$ 是一个 $\mathfrak{A}$ 中可定义的 n 元关系，则对任意 $|\mathfrak{A}|$ 中的元素 $a_1, \ldots, a_n$ 有，

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R \Leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R$$

同态与同构

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

上述定理为我们提示了一种证明“不可定义”的方法。

例

还是考虑

$$b \leftarrow a \rightarrow c$$

证明 $\{b\}$ 是不可定义的

初等等价

定义

给定语言 $\mathcal{L}$。我们说两个 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ **初等等价**，记 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 闭语句 σ 有，

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \sigma$$

初等等价

一些推论：

给定语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，反之未必
- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 初等类 $\mathcal{K}$ 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

初等等价

一些推论:

给定语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$

- $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ ，反之未必
- $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$ 初等类 $\mathcal{K}$ 有

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$$

一阶逻辑希尔伯特系统的可靠性定理

定理 (可靠性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的公式集 Γ 和公式 φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明.

对证明序列归纳

可靠性定理

定理 (可靠性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$ 的公式集 Γ 和公式 φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明.

对证明序列归纳

可靠性定理

假设 $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

接下来，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \le i \le n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

接下来，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

接下来，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

接下来，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$。归纳证明，对任意 $1 \leq i \leq n$ 有，$\Gamma \vDash \beta_i$

- 如果 $\beta_i \in \Gamma$
- 如果 β_i 是公理
- 如果存在 $j, k < i$，使得 $\beta_k = \beta_j \to \beta_i$

接下来，我们只需证明所有公理是有效的。

可靠性定理

一阶逻辑希尔伯特系统的公理：下列公式的全称概括

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现

可靠性定理

若语言中含有等词，则还有

5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

引理

$$\models \theta \;\Rightarrow\; \models \forall x\theta$$

因此，如果 θ 是有效的，那么它的所有全称概括都是有效的。所以，只需证所列 1-6 组的公式是有效的。

可靠性定理

引理

$$\models \theta \;\Rightarrow\; \models \forall x\theta$$

因此，如果 θ 是有效的，那么它的所有全称概括都是有效的。所以，只需证所列 1-6 组的公式是有效的。

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$，使得对任意素公式 β 有

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \models \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$ 公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \models \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$，有 $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$，使得对任意素公式 β 有

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \vDash \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$ 公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$，有 $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

任给 $\mathcal{L}$ 结构 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}$ 赋值 s，定义命题逻辑真值指派 $v_{(\mathfrak{A},s)}$，使得对任意素公式 β 有

$$v_{(\mathfrak{A},s)}(\beta^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \models \beta$$

归纳证明，对所有 $\mathcal{L}$ 公式 α 有，

$$\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1 \iff (\mathfrak{A}, s) \models \alpha$$

若 α^P 是重言式，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$，有 $\overline{v_{(\mathfrak{A},s)}}(\alpha^P) = 1$

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

假设 t 可以在公式 φ 中替换变元 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x$。由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，这显然成立

可靠性定理

假设 t 可以在公式 φ 中替换变元 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x$。由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，这显然成立

可靠性定理

假设 t 可以在公式 φ 中替换变元 x 并且 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，我们只需证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x$。由下述引理，

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

我们只需证：$(\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$，而由 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\varphi$，这显然成立

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$ 有

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\overline{s}(t)}) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

∎

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$ 有

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- φ 是原子公式 引理: $\bar{s}(u_t^x) = \overline{s^x_{\bar{s}(t)}}(u)$

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$ 有

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- φ 是原子公式　引理: $\bar{s}(u^x_t) = \overline{s^x_{\bar{s}(t)}}(u)$

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$ 有

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- φ 是几个子公式的布尔组合

可靠性定理

引理 (替换引理)

如果项 t 可以在公式 φ 中替换变元 x，则对任意 $(\mathfrak{A}, s)$ 有

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi_t^x \iff (\mathfrak{A}, s_{\bar{s}(t)}^x) \vDash \varphi$$

证明.

对公式 φ 归纳

- $\varphi = \forall y \psi$

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

可靠性定理

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

下期预告

- 一阶逻辑希尔伯特系统的完全性

习题

- 5.3.2 (1), (2)*, 5.3.3 - 5.3.5, 5.3.6 (1), 5.3.8