数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

前情提要

一阶逻辑希尔伯特公理系统

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha^x_t$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

一阶逻辑特色的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 概括定理
- 常数概括定理
- 约束变元替换定理

关于等词的元定理

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$
$P x_1 \ldots x_n \to P y_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$
$f x_1 \ldots x_n \approx f y_1 \ldots y_n)$

前束范式

前束范式

定义 (量词前束公式)

我们称具有

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \alpha$$

形式（其中 Q_i 是 $\forall$ 或 $\exists$，且 α 不含量词）的公式为 **量词前束公式**

前束范式

定理 (前束范式定理)

对任何公式 α 都存在量词前束公式 α'，使得

$$\alpha \vdash\dashv \alpha'$$

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \vdash\dashv \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \vdash\dashv \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \dashv\vdash \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \dashv\vdash \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \dashv\vdash \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

前束范式

用到的元定理

Q1a $\neg\forall x\alpha \vdash\dashv \exists x\neg\alpha$

Q1b $\neg\exists x\alpha \vdash\dashv \forall x\neg\alpha$

Q2a $(\alpha \to \forall x\beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q2b $(\alpha \to \exists x\beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 α 中自由出现

Q3a $(\forall x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

Q3b $(\exists x\alpha \to \beta) \vdash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ 如果 x 不在 β 中自由出现

证明.

对公式 α 归纳证明:

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$
- 若 $\alpha = \forall x\beta$

前束范式

证明.

对公式 α 归纳证明:

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$
- 若 $\alpha = \forall x\beta$

前束范式

证明.

对公式 α 归纳证明:

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$
- 若 $\alpha = \forall x \beta$

前束范式

证明.

对公式 α 归纳证明:

- 若 α 是原子公式
- 若 $\alpha = \neg\beta$
- 若 $\alpha = \beta \to \gamma$
- 若 $\alpha = \forall x\beta$

一阶逻辑语言的语义

回顾命题逻辑的语义

命题逻辑的语义：

- 命题符号的语义由真值指派给出：$v : \mathcal{A} \to 2$
- 命题（公式）的语义 $\bar{v} : \mathcal{F} \to 2$ 取决于命题符号的语义、命题联词（逻辑符号）的语义及其自身构造
- 而命题联词的语义体现于 $v \to \bar{v}$ 的扩张，不依赖于特定的语义解释 v

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号 （逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑语言的语义

具有固定语义解释的符号 （逻辑符号）：

- 命题联词
- 等词

可以有不同解释的符号 （参数符号）：

- 常数符号
- 谓词符号（不包括等词）
- 函数符号
- 量词

一阶逻辑的语义

需要特殊处理的符号

- 变元
  - 约束出现的变元
  - 自由出现的变元

对参数符号的解释——结构

定义 (结构)

$\mathcal{L}$ 是一阶语言，一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 是一个以 $\mathcal{L}$ 中参数符号为定义域的函数并满足：

- $\mathfrak{A}(\forall)$ 是一个非空集合，记 $|\mathfrak{A}|$，称作 $\mathfrak{A}$ 的论域
- 对 n 元谓词符号 P，$\mathfrak{A}(P)$ 记作 $P^{\mathfrak{A}}$，$P^{\mathfrak{A}} \subset |\mathfrak{A}|^n$
- 对 n 元函数符号 f，$\mathfrak{A}(f)$ 记作 $f^{\mathfrak{A}}$，$f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$
- 对常数符号 c，$\mathfrak{A}(c)$ 记作 $c^{\mathfrak{A}}$，$c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$

一阶逻辑的语义

约定

考虑语言 $\mathcal{L} = \{P_1, \ldots, P_n, f_1, \ldots, f_m, c_1, \ldots, c_k\}$。我们常把一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 记作 $(|\mathfrak{A}|, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{A}}, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_m^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}})$

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

一阶逻辑的语义

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

例

给定语言 $\mathcal{L} = \{R\}$，R 是一个二元谓词符号。

$\forall v_1 \exists v_2 R v_1 v_2$ 和 $\exists v_2 \forall v_1 R v_1 v_2$ 的意思是?

若令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，且 $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$，$R^{\mathfrak{A}}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq_{\mathbb{N}}$，那么上述公式在这个解释下的意思是?

$R^{\mathfrak{A}}$ 是小于关系 $<_{\mathbb{N}}$ 呢?

$|\mathfrak{A}| = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 呢?

一阶逻辑的语义

对变元的解释——赋值

定义 (赋值)

给定语言 $\mathcal{L}$ 以及 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。我们称 s 是一个 $\mathfrak{A}$ 赋值，当且仅当 s 是从所有变元的集合 V 到 $|\mathfrak{A}|$ 的函数 $s : V \to |\mathfrak{A}|$

对项的解释

定义 (项的赋值)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。令 s 是一个 $\mathfrak{A}$ 赋值，我们递归定义对项的解释 $\bar{s}: \mathcal{T} \to |\mathfrak{A}|$ 如下：

- 对每个变元符号 x， $\bar{s}(x) = s(x)$；
- 对每个常数符号 c， $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项，f 是一个 n 元函数符号，则 $\bar{s}(ft_1 \ldots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$

一阶逻辑的语义

对公式的解释

定义 (满足关系)

给定语言 $\mathcal{L}$。令 $\mathfrak{A}$ 是一个 $\mathcal{L}$-结构，s 是一个 $\mathfrak{A}$ 赋值，α 是一个 $\mathcal{L}$ 公式，我们对 α 递归定义 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 α （记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha$ ）如下

- α 是原子公式
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash t_1 \approx t_2$ ，当且仅当 $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$
  - $(\mathfrak{A}, s) \vDash Pt_1 \ldots t_n$ ，当且仅当 $(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\beta$，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \not\models \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \models \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s^x_d) \models \varphi$

其中 s^x_d 是一个新的 $|\mathfrak{A}|$ 赋值：

$$s^x_d(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\beta$，当且仅当 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$
- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \beta \to \gamma$，当且仅当或者 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash \beta$ 或者 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \gamma$
- $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\beta$，当且仅当对任何 $d \in |\mathfrak{A}|$，有 $(\mathfrak{A}, s_d^x) \vDash \varphi$

其中 s_d^x 是一个新的 $|\mathfrak{A}|$ 赋值:

$$s_d^x(y) = \begin{cases} s(y) & \text{若 } y \neq x \\ d & \text{若 } y = x \end{cases}$$

一阶逻辑的语义

例

令语言 $\mathcal{L} = \{\leq\}$，令 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$。其中，$\leq^{\mathbb{N}}$ 是自然数上通常的小于等于关系。考虑

$$(\mathfrak{N}, s) \vDash \forall y x \leq y$$

其中，$s(x) = 0$

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$ 赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中 自由出现 的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

证明.

对公式 φ 归纳

引理 (合同引理)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。任给 $\mathfrak{A}$ 赋值 s_1, s_2。如果它们关于在公式 φ 中 自由出现 的变元的赋值相同，那么 $(\mathfrak{A}, s_1) \vDash \varphi$ 当且仅当 $(\mathfrak{A}, s_2) \vDash \varphi$

证明.

对公式 φ 归纳

一阶逻辑的语义

约定

- 我们用 $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ 表示公式 φ 且预设 φ 中自由出现的变元至多有 $x_1, \ldots, x_n$
- 对 $\varphi(x_1, \ldots x_n)$，我们用 $\mathfrak{A} \vDash \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ 表示 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$，其中 $s(x_i) = d_i \quad (1 \leq i \leq n)$

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathfrak{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

一阶逻辑的语义

推论

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$。给定语言对任何闭语句 σ，或者

(1) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \models \sigma$；或者

(2) 对所有 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有，$(\mathfrak{A}, s) \not\models \sigma$

定义 (真)

给定语言 $\mathcal{L}$、$\mathcal{L}$-结构、$\mathfrak{L}$ 中闭语句 σ。我们称 σ 在 $\mathfrak{A}$ 中为真，记 $\mathfrak{A} \models \sigma$，当且仅当 (1) 成立

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和任意 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$ ），那么 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$； $\alpha \vDash\dashv \beta$ （逻辑等效）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （逻辑有效）

一阶逻辑的语义

定义 (语义蕴含)

给定语言 $\mathcal{L}$。称公式集 Γ 逻辑蕴含 φ，记 $\Gamma \vDash \varphi$ ，当且仅当对任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathfrak{A}$ 和任意 $\mathfrak{A}$ 赋值 s 都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（记 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Gamma$ ），那么 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi$

约定

- 以后 $\vDash$ 依语境主要表示 满足 关系和 逻辑蕴涵 关系
- $\alpha \vDash \beta$ 即 $\{\alpha\} \vDash \beta$； $\alpha \vDash\dashv \beta$ （ 逻辑等效 ）
- $\vDash \alpha$ 即 $\emptyset \vDash \alpha$ （ 逻辑有效 ）

下期预告

- 在结构内定义结构上的关系、函数以及结构论域中的对象
- 定义结构类

习题

- 4.3.4
- 4.4.1, 4.4.2
- 5.1.2, 5.1.3 - 5.1.6, 5.1.8 - 5.1.12