数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

前情提要

一阶逻辑希尔伯特公理系统

1. 对应的命题逻辑公式 α^P 是重言式的一阶逻辑公式 α
2. $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中项 t 可以在 α 中替代 x
3. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
4. $\alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. $x \approx x$
6. $x \approx y \to \alpha \to \alpha'$，其中 α 为原子公式，且 α' 是将 α 中若干个 x 的出现替换为 y 所得到的公式

前情提要

一阶逻辑公理系统的元定理

承自命题逻辑的元定理：

- 概括定理
- 重言规则
- 演绎定理
- 逆否命题
- 反证法

“更一阶逻辑”的元定理

“更一阶逻辑” 的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

证明.

假设 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$，归纳证明 $((\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi^c_y$

运用概括定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

证明.

假设 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$，归纳证明 $((\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi^c_y$

运用概括定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$

“更一阶逻辑”的元定理

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

证明.

假设 $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi$，归纳证明 $((\alpha_0)_y^c, \ldots, (\alpha_n)_y^c)$ 见证 $\Gamma \vdash \varphi_y^c$

运用概括定理得到 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现，则变元 x 可以在 φ^x_y 中替换 y，并且 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$

证明.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi^x_c$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$，且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现，则变元 x 可以在 φ^x_y 中替换 y，并且 $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$

证明.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi^x_c$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$，且存在一个不出现 c 的推演见证。

“更一阶逻辑”的元定理

引理 (循环替换引理)

如果变元 y 不在公式 φ 中出现，则变元 x 可以在 φ_y^x 中替换 y，并且 $(\varphi_y^x)_x^y = \varphi$

证明.

习题

推论

假设 $\Gamma \vdash \varphi_c^x$ 且 c 不在 Γ 和 φ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x\varphi$，且存在一个不出现 c 的推演见证。

"更一阶逻辑"的元定理

定理 (约束变元替换定理)

φ 是公式，t 是项，x 是变元。我们总可以找到一个公式 φ'，使得

- φ' 和 φ 的区别仅在约束变元的选择
- $\varphi \vdash\dashv \varphi'$
- t 可以替换 φ' 中的 x

证明.

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$

元定理的应用

上述元定理告诉我们关于一阶逻辑的希尔伯特系统“能证什么”的事实。当我们要证明“能证明”时，往往会用到它们。

例

$\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi^x_y$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi^x_y$，而 $\forall y \psi^x_y \vdash\dashv \forall x \psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi_y^x$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi_y^x$，而 $\forall y \psi_y^x \vdash\dashv \forall x \psi$

元定理的应用

证明 $\Gamma \vdash \varphi$ 的一般策略

- 要证明 $\Gamma \vdash \psi \to \theta$，只需证 $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \theta$
- 要证明 $\Gamma \vdash \forall x \psi$
  - 如果 x 不在 Γ 中自由出现，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 如果 x 在 ψ 中自由出现，我们找一个“全新”的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \psi^x_y$，从而有 $\Gamma \vdash \forall y \psi^x_y$，而 $\forall y \psi^x_y \vdash\dashv \forall x \psi$

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \rightarrow \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$，(并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，(并非总是可能) 或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

- 要证明 $\Gamma \vdash \neg\alpha$，分情况：
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\neg\psi$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \theta)$，只需证 $\Gamma \vdash \psi$ 和 $\Gamma \vdash \neg\theta$
  - 要证明 $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$，尝试找到项 t 并证明 $\Gamma \vdash \neg\psi_t^x$，（并非总是可能）或尝试逆否命题换位或反证法。

元定理的应用

以上策略可以应付几乎所有作业，是否能应付所有情况呢？
问题出在哪儿呢？

关于等词的元定理

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$
$Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$
$fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow Px_1 \ldots x_n \rightarrow Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \approx y_n \rightarrow fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

关于等词的元定理

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to P x_1 \ldots x_n \to P y_1 \ldots y_n)$

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to f x_1 \ldots x_n \approx f y_1 \ldots y_n)$

下期预告

- 前束范式
- 一阶逻辑的语义（塔斯基真定义）

习题

- 4.3.1, 4.3.2
- 证明 (Eq3) - (Eq5) 是一阶逻辑公理系统中可证的