

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

# 前情提要

# 前情提要

## 一阶逻辑的语言

- 符号：
  - 变元符号集  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots\}$
  - 量词:  $\forall, \exists$
  - 非逻辑符号: 常量符号, 函数符号, 谓词符号 (等词)
- 项  $\mathcal{T}$
- 公式  $\mathcal{F}$

# 前情提要

## 一些定义

- 原子公式
- 自由出现 / 约束出现 / 语句
- (项的) 代入 / (公式的) 代入

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

## 定义 (全称概括)

称公式  $\varphi$  是公式  $\psi$  的 **全称概括**，当且仅当存在自然数  $n$  和变元  $x_1, \dots, x_n$  使得

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$$

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

## 定义 (素公式)

我们称原子公式或形如  $\forall x\beta$  的公式为 **素公式**

令  $\langle \beta_1, \beta_2, \dots \rangle$  是对所有素公式的**枚举**。我们定义一个一阶逻辑公式  $\alpha$  的命题逻辑公式对应  $\alpha^P$  :

■ 当  $\alpha = \beta_i$  是一个素公式:  $\alpha^P = \beta_i^P = A_i$

■ 当  $\alpha = \neg\beta$ :  $\alpha^P = \neg\beta^P$

■ 当  $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ :  $\alpha^P = \beta^P \rightarrow \gamma^P$

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式  $\alpha^P$  是重言式的一阶逻辑公式  $\alpha$
- 2  $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ , 其中项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$
- 3  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4  $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ , 其中变元  $x$  不在  $\alpha$  中自由出现



# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式  $\alpha^P$  是重言式的一阶逻辑公式  $\alpha$
- 2  $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ , 其中项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$
- 3  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4  $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ , 其中变元  $x$  不在  $\alpha$  中自由出现

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式  $\alpha^P$  是重言式的一阶逻辑公式  $\alpha$
- 2  $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ , 其中项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$
- 3  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4  $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ , 其中变元  $x$  不在  $\alpha$  中自由出现

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

- 1 对应的命题逻辑公式  $\alpha^P$  是重言式的一阶逻辑公式  $\alpha$
- 2  $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ , 其中项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$
- 3  $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
- 4  $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$ , 其中变元  $x$  不在  $\alpha$  中自由出现

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

公理：一阶逻辑希尔伯特系统的公理是由下列公式的全称概括组成的

若语言中含有等词，则还有

5  $x \approx x$

6  $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$ ，其中  $\alpha$  为原子公式，且  $\alpha'$  是将  $\alpha$  中若干个  $x$  的出现替换为  $y$  所得到的公式

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

## 不可替代的例子

令  $\alpha = \exists y x \neq y$ 。分别考虑

- $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_z^x$

- $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_y^x$

如果我们希望定义 项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$  为“替换后  $t$  中的变元不会被  $\alpha$  中已有的量词抓住”，我们该怎样严格地给出定义？

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

不可替代的例子

令  $\alpha = \exists y x \neq y$ 。分别考虑

- $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_z^x$

- $\forall x \alpha \rightarrow \alpha_y^x$

如果我们希望定义 **项  $t$  可以在  $\alpha$  中替代  $x$**  为“替换后  $t$  中的变元不会被  $\alpha$  中已有的量词抓住”，我们该怎样严格地给出定义？

# 一阶谓词逻辑的希尔伯特系统

定义 ( (一阶逻辑的) 推演 / 证明 / 演绎)

从公式集  $\Gamma$  到公式  $\varphi$  的一个 **推演** (或 **证明** 或 **演绎**) 是一个 **有穷的公式序列**  $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ , 满足  $\alpha_n = \varphi$  并且对所有  $i \leq n$  或者

(a)  $\alpha_i$  属于  $\Gamma \cup \Lambda$ ; 或者

(b) 存在  $j, k < i$ , 使得  $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$

$\Gamma \vdash \varphi$  即存在一个从  $\Gamma$  到  $\varphi$  的推演;  $\vdash \varphi$  即  $\emptyset \vdash \varphi$

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理



# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 定理 (概括定理)

如果  $\Gamma \vdash \varphi$  并且  $x$  不在  $\Gamma$  的任何公式中自由出现, 那么

$$\Gamma \vdash \forall x\varphi$$

证明.

对见证  $\Gamma \vdash \varphi$  的证明序列归纳

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (概括定理)

如果  $\Gamma \vdash \varphi$  并且  $x$  不在  $\Gamma$  的任何公式中自由出现, 那么

$$\Gamma \vdash \forall x\varphi$$

证明.

对见证  $\Gamma \vdash \varphi$  的证明序列归纳

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T) )

如果  $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$  并且  $(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$  是重言式, 那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

证明.

$(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$  是重言式, 则  $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$  是公理。运用  $n$  次分离规则。

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (重言规则 (rule T) )

如果  $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$  并且  $(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$  是重言式, 那么

$$\Gamma \vdash \beta$$

证明.

$(\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta)^P$  是重言式, 则  $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$  是公理。运用  $n$  次分离规则。

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$ , 当且仅当  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$

证明.

与命题逻辑相同

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\gamma\} \vdash \varphi$ , 当且仅当  $\Gamma \vdash (\gamma \rightarrow \varphi)$

证明.

与命题逻辑相同

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 推论 (逆否命题)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$  当且仅当  $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$  当且仅当  $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$

证明.

由演绎定理和有关重言式

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 推论 (逆否命题)

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$  当且仅当  $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$  当且仅当  $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$

证明.

由演绎定理和有关重言式



# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 定义 (不一致)

我们称公式集  $\Sigma$  是 **不一致的**，当且仅当存在公式  $\beta$ ， $\Sigma \vdash \beta$  且  $\Sigma \vdash \neg\beta$  (也即对任意公式  $\alpha$  有， $\Sigma \vdash \alpha$ )

## 推论 (反证法)

如果  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  不一致，那么  $\Gamma \vdash \neg\varphi$

证明.

运用演绎定理

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 定义 (不一致)

我们称公式集  $\Sigma$  是 **不一致的**，当且仅当存在公式  $\beta$ ， $\Sigma \vdash \beta$  且  $\Sigma \vdash \neg\beta$  (也即对任意公式  $\alpha$  有， $\Sigma \vdash \alpha$ )

## 推论 (反证法)

如果  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  不一致，那么  $\Gamma \vdash \neg\varphi$

证明.

运用演绎定理

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 定义 (不一致)

我们称公式集  $\Sigma$  是 **不一致的**，当且仅当存在公式  $\beta$ ， $\Sigma \vdash \beta$  且  $\Sigma \vdash \neg\beta$  (也即对任意公式  $\alpha$  有， $\Sigma \vdash \alpha$ )

## 推论 (反证法)

如果  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  不一致，那么  $\Gamma \vdash \neg\varphi$

证明.

运用演绎定理

# 一阶逻辑希尔伯特系统的元定理

## 定义 (不一致)

我们称公式集  $\Sigma$  是 **不一致的**，当且仅当存在公式  $\beta$ ， $\Sigma \vdash \beta$  且  $\Sigma \vdash \neg\beta$  (也即对任意公式  $\alpha$  有， $\Sigma \vdash \alpha$ )

## 推论 (反证法)

如果  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  不一致，那么  $\Gamma \vdash \neg\varphi$

证明.

运用演绎定理

# 下期预告

更多关于一阶逻辑希尔伯特公理系统的元定理

# 习题

- 4.1.1, 4.1.2,
- 4.2.1, 4.2.4, 4.2.5