数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

前情提要

- 命题逻辑的可靠性：$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \models \tau$
- 定义了一致 / 不一致，可满足 / 不可满足

命题逻辑的完全性

目标：

$$\Sigma \vDash \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma\ \text{一致} \Rightarrow \Sigma\ \text{可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派?

定义

称公式集 Δ 是 **极大一致的**，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派?

定义

称公式集 Δ 是 极大一致的， 当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派?

定义

称公式集 Δ 是 极大一致的， 当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的？

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的?

命题逻辑的完全性

我们证明了，命题逻辑的希尔伯特公理系统是完全的。我们的证明哪里体现了那些公理、推理规则是足够用的？

完全性的一个构造性证明

引理 (弱形式的完全性定理)

$$\models \alpha \quad \Rightarrow \vdash \alpha$$

完全性的一个构造性证明

引理

假设 α 至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_k$。v 是一个真值指派。定义

$$A_i^v = \begin{cases} A_i & 若\ v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & 否则 \end{cases}$$

类似地，若 $\bar{v}(\alpha) = 1$，则令 $\alpha^v = \alpha$；否则，$\alpha^v = \neg\alpha$。那么就有

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha^v$$

完全性的一个构造性证明

引理

假设 α 至多含有命题符号 $A_1, \ldots, A_k$。v 是一个真值指派。

定义

$$A_i^v = \begin{cases} A_i & \text{若 } v(A_i) = 1 \\ \neg A_i & \text{否则} \end{cases}$$

类似地，若 $\bar{v}(\alpha) = 1$，则令 $\alpha^v = \alpha$；否则，$\alpha^v = \neg\alpha$。那么就有

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha^v$$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$； 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$； 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$；

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$

- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$

- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$

- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

证明.

对 α 的构造归纳。

- $\alpha = A_i$
- $\alpha = \neg\beta$

  情况 1: $\bar{v}(\alpha) = 1$; 情况 2: $\bar{v}(\alpha) = 0$
- $\alpha = \beta \to \gamma$

  情况 1: $\bar{v}(\beta) = 0$; 情况 2: $\bar{v}(\gamma) = 1$;

  情况 3: $\bar{v}(\beta) = 1$ 且 $\bar{v}(\gamma) = 0$

完全性的一个构造性证明

弱形式的完全性定理: $\vDash \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$

证明.

假设 $\vDash \alpha$。对任意真值指派 v，都有 $\alpha^v = \alpha$。因此有,

$$\{A_1^v, \ldots, A_k^v\} \vdash \alpha$$

特别地，考虑 v_1, v_2，除了 $v_1(A_k) = 0, v_2(A_k) = 1$，其他指派都一样……

命题逻辑的紧致性定理

定理 (紧致性定理)

公式集 Σ 是可满足的，当且仅当 Σ 的每个有穷子集是可满足的

证明.

运用完全性定理（强形式）

命题逻辑的紧致性定理

定理 (紧致性定理)

公式集 Σ 是可满足的，当且仅当 Σ 的每个有穷子集是可满足的

证明.

运用完全性定理（强形式）

紧致性定理的应用

定义

- 称二元组 (G, E) 是一个（无向）图（graph），当且仅当 G 是一个节点（vertice）集合，$E \subseteq G^2$ 是节点间的连线关系，E 是对称的，反自返的。
- 称 (G_0, E_0) 是 (V, E) 的子图，当且仅当 $G_0 \subseteq G$ 且 $E_0 = E \cap G_0^2$

紧致性定理的应用

定理 (四色定理)

任何（可能无穷的）平面（Kuratowski’s theorem）无向图可以被四种颜色染色使得相连节点被染不同的颜色

紧致性定理推论

如果一个图（可能是可数无穷的）的每个有穷子图都能用四种颜色染色且不会造成相邻节点染成同一种颜色，那么这整个图都能用四种颜色染色

因此，四色定理的“有穷”版本蕴含完整版本

紧致性定理的应用

定理 (四色定理)

任何（可能无穷的）平面（Kuratowski’s theorem）无向图可以被四种颜色染色使得相连节点被染不同的颜色

紧致性定理推论

如果一个图（可能是可数无穷的）的每个有穷子图都能用四种颜色染色且不会造成相邻节点染成同一种颜色，那么这整个图都能用四种颜色染色

因此，四色定理的“有穷”版本蕴含完整版本

紧致性定理的应用

证明.

不妨设 $G = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$，$E \subset G^2$，$(G, E)$ 是一个图。令命题符号集合

$$\mathcal{A} = \{A_i^c \mid i \in G, c \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

令 Σ 包含下列公式

1. $A_i^1 \vee A_i^2 \vee A_i^3 \vee A_i^4$ $(i \in G)$
2. $A_i^c \to \neg A_i^d$ $(i \in G$ 且 $c \neq d)$
3. $\neg(A_i^c \wedge A_j^c)$ (若 iEj)

下期预告

- 一阶谓词逻辑的语言
- 自由出现与约束出现

习题

- 2.8.2, 2.8.3, 2.8.5
- 我们称公式集 Σ 是 完全的 ， 当且仅当对任意公式 α 或者 $\alpha \in \Sigma$ 或者 $(\neg\alpha) \in \Sigma$。

  证明: 假设 Σ 的每个有穷子集可满足，那么存在完全的 $\Gamma \supset \Sigma$ 且 Γ 的每个有穷子集可满足

  (*) 不引用命题逻辑完全性定理而直接证明命题逻辑紧致性定理