数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

前情提要

- 我们为联词、公式赋予的语义——布尔函数
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是功能完全的

  证明: 析取范式
- 推论: $\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$……都是功能完全的
- 如何证明一组联词不是功能完全的?

命题逻辑希尔伯特系统的可靠性

命题逻辑的可靠性

定理（可靠性 定理)

令 Σ 是一个公式集，τ 是一个公式。那么

$$\Sigma \vdash \tau \Rightarrow \Sigma \vDash \tau$$

特别地，若 $\vdash \tau$，则 $\vDash \tau$

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑的可靠性

证明.

假设 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ 见证 $\Sigma \vdash \tau$。对 $1 \leq i \leq n$ 归纳证明：$\Sigma \vDash \beta_i$

情型 1 若 β_i 是公理. 证明 (A1)-(A3) 是重言式

情型 2 若 $\beta_i \in \Sigma$. 由定义，平凡

情型 3 若存在 $j, k < i$，$\beta_k = \beta_j \to \beta_i$. 借助归纳假设

命题逻辑希尔伯特系统的完全性

命题逻辑的完全性

定理（完全性 定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点：对每组符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门：证明，$\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \nvDash \tau$

命题逻辑的完全性

定理（完全性 定理）

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点：对每组符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门：证明，$\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \not\models \tau$

命题逻辑的完全性

定理（完全性 定理)

$$\Sigma \models \tau \Rightarrow \Sigma \vdash \tau$$

- 难点：对每组符合条件的 Σ, τ 构造一个见证 $\Sigma \vdash \tau$ 的推演序列
- 窍门：证明，$\Sigma \nvdash \tau \Rightarrow \Sigma \nvDash \tau$

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是 不一致的 （inconsistent），如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 一致的，当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

定义

称公式集 Σ 是 不一致的 （inconsistent），如果存在某个公式 α 使得 $\Sigma \vdash \alpha$ 且 $\Sigma \vdash \neg\alpha$

称 Σ 是 一致的 ，当且仅当它不是不一致的

命题逻辑的完全性

注意：

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实：

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

注意:

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实:

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

注意:

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实:

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

注意：

- “一致”与“不一致”都是语法性质
- “不一致”是个断言“存在证明”的性质，“一致”相反

事实：

- Σ 是不一致的，当且仅当对任意公式 β 有，$\Sigma \vdash \beta$
- $\Sigma \vdash \tau$，当且仅当 $\Sigma \cup \{\neg\tau\}$ 不一致

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是可满足的（satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是不可满足的，当且仅当它不是可满足的

注意: 可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是可满足的（satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是不可满足的，当且仅当它不是可满足的

注意：可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

定义

- 称公式集 Σ 是可满足的（satisfiable），当且仅当存在一个真值指派满足 Σ 中所有公式
- 称 Σ 是不可满足的，当且仅当它不是可满足的

注意：可满足是语义概念

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \models \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

引理

下列命题等价

(1) 如果 $\Sigma \vDash \tau$，则 $\Sigma \vdash \tau$

(2) 如果 Σ 一致，则 Σ 可满足

证明.

$(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (1)$

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

所以，我们现在只需要证明

$$\Sigma \text{ 一致} \Rightarrow \Sigma \text{ 可满足}$$

即把找“推演序列”的问题转变为找“真值指派”的问题

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派?

定义

称公式集 Δ 是 **极大一致的**，当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派?

定义

称公式集 Δ 是 极大一致的 ， 当且仅当 Δ 是一致的，且 Δ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 Δ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

怎么找真值指派?

定义

称公式集 $\varDelta$ 是 极大一致的， 当且仅当 $\varDelta$ 是一致的，且 $\varDelta$ 的任何真扩张都不是一致的

引理

任何极大一致集 $\varDelta$ 都是可满足的。

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \dots$（为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的?

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集： $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ （为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的?

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的?

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的?

命题逻辑的完全性

引理

每个一致公式集 Σ 都可以被扩张成一个极大一致集

证明.

- 枚举全体公式集：$\alpha_0, \alpha_1, \ldots$（为什么可以?）
- 依照上述枚举递归定义公式集序列 $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- 确保每个公式都被检验，保持 Δ_n 是一致的
- 令 $\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$。为什么 Δ 是一致的？极大的?

命题逻辑的完全性

我们证明了，命题逻辑的希尔伯特公理系统是完全的。我们的证明哪里体现了那些公理、推理规则是足够用的?

下期预告

- 完全性定理的构造性证明
- 命题逻辑的紧致性
- 一阶谓词逻辑的语言

习题

- 2.8.2, 2.8.3, 2.8.5