

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语言
 - 命题逻辑公式的唯一可读性
- 经典命题逻辑的希尔伯特系统
 - 公理（模式）
 - 分离规则
 - 证明 / 演绎（序列）

命题逻辑的语义

命题逻辑的语义

命题逻辑中，命题是语义的最小载体。且经典命题逻辑只关心“真”、“假”

定义 (真值指派)

我们说 v 是一个真值指派，当且仅当 v 是以由命题符号组成的集合 \mathcal{A} 为定义域、以真值集合 $\{0, 1\}$ 为值域的函数 $v: \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$

命题逻辑的语义

命题逻辑中，命题是语义的最小载体。且经典命题逻辑只关心“真”、“假”

定义 (真值指派)

我们说 v 是一个 **真值指派**，当且仅当 v 是以由命题符号组成的集合 \mathcal{A} 为定义域、以**真值集合** $\{0, 1\}$ 为值域的函数

$$v: \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 ν , 我们定义 ν 的扩展 $\bar{\nu} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $A \in \mathcal{A}$, $\bar{\nu}(A) = \nu(A)$

1 对任意公式 α, β ,

$$\bar{\nu}(\neg\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{\nu}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v , 我们定义 v 的扩展 $\bar{v} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $A \in \mathcal{A}$, $\bar{v}(A) = v(A)$

1 对任意公式 α, β ,

$$\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 ν , 我们定义 ν 的扩展 $\bar{\nu} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $A \in \mathcal{A}$, $\bar{\nu}(A) = \nu(A)$

1 对任意公式 α, β ,

$$\bar{\nu}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{\nu}(\alpha) = 1 \text{ 或者 } \bar{\nu}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 v , 我们定义 v 的扩展 $\bar{v} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $A \in \mathcal{A}$, $\bar{v}(A) = v(A)$

1 对任意公式 α, β ,

$$\bar{v}(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

命题联词的语义何以体现?

定义 (命题联词的语义)

任给真值指派 ν , 我们定义 ν 的扩展 $\bar{\nu} : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$

0 对 $A \in \mathcal{A}$, $\bar{\nu}(A) = \nu(A)$

1 对任意公式 α, β ,

$$\bar{\nu}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{\nu}(\alpha) = \bar{\nu}(\beta) \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

命题逻辑的语义

注意：

- 对 \bar{v} 的定义是一个递归定义
 - 它告诉我们，给定一个真值指派，如何计算一个具体公式的真值

命题联词

我们对诸命题联词的语义解释，就体现在对“如何从 v 得到 \bar{v} ”的定义。

例如：

$$\bar{v}(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题联词

我们对诸命题联词的语义解释，就体现在对“如何从 v 得到 \bar{v} ”的定义。

例如：

$$\bar{v}(\alpha \rightarrow \beta) = \begin{cases} 0 & \text{若 } \bar{v}(\alpha) = 1 \text{ 并且 } \bar{v}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

命题联词

或用真值表表示：

$\bar{v}(\alpha)$	$\bar{v}(\beta)$	$\bar{v}(\alpha \rightarrow \beta)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

命题联词

或用真值表表示：

x	y	$B_{\rightarrow}(x, y)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

命题联词

我们赋予二元联词 \rightarrow 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\rightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

而赋予一元联词 \neg 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

我们称这种以 $\{0, 1\}$ (或其卡氏积) 为定义域和值域的函数为 布尔函数

命题联词

我们赋予二元联词 \rightarrow 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\rightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

而赋予一元联词 \neg 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

我们称这种以 $\{0, 1\}$ (或其卡氏积) 为定义域和值域的函数为 布尔函数

命题联词

我们赋予二元联词 \rightarrow 的意义就是一个二元函数：

$$B_{\rightarrow} : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

而赋予一元联词 \neg 的意义是一个一元函数

$$B_{\neg} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

我们称这种以 $\{0, 1\}$ (或其卡氏积) 为定义域和值域的函数为 **布尔函数**

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种**不同意义的一元**联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种一元布尔函数？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

问题：

- 有多少种一元联词？
- 有多少种二元联词？
- 有多少种 n 元联词？

命题联词

命题联词的合成

x	y	$B_{\neg}(x)$	$B_{\vee}(x, y)$	$B_{\top}(x)$	$B_{\downarrow}(x, y)$
1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1

则 $B_{\top}(x) = B_{\vee}(B_{\neg}(x), x)$, 而 $B_{\downarrow}(x, y) = B_{\neg}(B_{\vee}(x, y))$

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 A_1, \dots, A_n 的合式公式, 那么 α 就**决定**了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

$v(A_1), \dots, v(A_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \dots, v_1(A_n) = 1, \dots, 1$	$\bar{v}_1(\alpha)$
$\dots \quad \dots$	\dots
$v_{2^n}(A_1), \dots, v_{2^n}(A_n) = 0, \dots, 0$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

命题联词

假设 α 是一个至多含有命题符号 A_1, \dots, A_n 的合式公式, 那么 α 就**决定**了一个 n 元布尔函数 $B_\alpha^n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$

$v(A_1), \dots, v(A_n)$	x_1, \dots, x_n	$B_\alpha^n(x_1, \dots, x_n)$	$\bar{v}(\alpha)$
$v_1(A_1), \dots, v_1(A_n)$	$= 1, \dots, 1$	$B_\alpha^n(1, \dots, 1) =$	$\bar{v}_1(\alpha)$
\dots	\dots	\dots	\dots
$v_{2^n}(A_1), \dots, v_{2^n}(A_n)$	$= 0, \dots, 0$	$B_\alpha^n(0, \dots, 0) =$	$\bar{v}_{2^n}(\alpha)$

命题联词

定义

令 α 是至多含有命题变元 A_1, \dots, A_n 的公式。定义函数

$B_\alpha^n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, 使得

$$B_\alpha^n(x_1, \dots, x_n) = \bar{v}(\alpha)$$

其中, $v(A_i) = x_i \quad (1 \leq i \leq n)$

命题联词

一个命题逻辑公式 α 在意义上等同于 $\star(A_1, \dots, A_n)$, 其中 \star 是某个 n 元命题联词。

问题: 是否对每个 n 元命题联词, 我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式? 即 \neg 、 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 和 \leftrightarrow 是否够用? 也即, 是否只用 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、 B_{\vee} 、 B_{\rightarrow} 和 B_{\leftrightarrow} 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数?

命题联词

一个命题逻辑公式 α 在意义上等同于 $\star(A_1, \dots, A_n)$, 其中 \star 是某个 n 元命题联词。

问题: 是否对每个 n 元命题联词, 我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式? 即 \neg 、 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 和 \leftrightarrow 是否够用? 也即, 是否只用 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、 B_{\vee} 、 B_{\rightarrow} 和 B_{\leftrightarrow} 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数?

命题联词

一个命题逻辑公式 α 在意义上等同于 $\star(A_1, \dots, A_n)$, 其中 \star 是某个 n 元命题联词。

问题: 是否对每个 n 元命题联词, 我们都可以找到一个具有相同意义的合式公式? 即 \neg 、 \wedge 、 \vee 、 \rightarrow 和 \leftrightarrow 是否够用? 也即, 是否只用 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、 B_{\vee} 、 B_{\rightarrow} 和 B_{\leftrightarrow} 就可以通过复合得到任意 n 元布尔函数?

命题联词

定理

对任意 n 元布尔函数 $G : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ($n \geq 1$), 都存在一个命题逻辑合式公式 α , 使得 $B_\alpha^n = G$

命题联词

例:

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\alpha = (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$$

$$\text{检验: } M = B_\alpha^3$$

命题联词

例:

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\alpha = (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$$

检验: $M = B_\alpha^3$

命题联词

例:

x_1	x_2	x_3	$M(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
1	1	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

令

$$\alpha = (A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$

$$\vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$$

$$\text{检验: } M = B_\alpha^3$$

命题联词

证明.

对一般情况的证明

命题联词

定义

称一组联词（布尔函数） C 是**功能完全的**，如果任意 n 元布尔函数（ $n \geq 1$ ）都可以由 C 中的布尔函数通过函数复合定义。

例：

- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}, B_{\vee}\}$ ，由上述证明（为什么？）
- $\{B_{\neg}, B_{\wedge}\}$ ，因为 $B_{\vee}(x, y) = B_{\neg}(B_{\wedge}(B_{\neg}(x), B_{\neg}(y)))$

...

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、或 B_{\vee}
- 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例： $\{B_{\wedge}, B_{\neg}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、或 B_{\vee}
- 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例： $\{B_{\wedge}, B_{\neg}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、或 B_{\vee}
- 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例： $\{B_{\wedge}, B_{\neg}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、或 B_{\vee}
- 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例： $\{B_{\wedge}, B_{\neg}\}$

命题联词

如何证明一组命题联词不是功能完全的？

- 证明其不能复合出某个布尔函数，如 B_{\neg} 、 B_{\wedge} 、或 B_{\vee}
- 寻找，例如 B_{\neg} 的某个性质，证明所有能复合出来的函数都不具备这个性质
- 归纳证明这点

例： $\{B_{\wedge}, B_{\rightarrow}\}$

命题逻辑的语义 (续)

定义

- 称一个真值指派 v **满足** 一个公式 α , 如果 $\bar{v}(\alpha) = 1$
- 称一个公式集 Σ **重言蕴含** 公式 τ ($\Sigma \vDash \tau$), 若每个满足 Σ 中所有公式的真值指派也满足 τ
- 称一个公式 τ 是 **重言式**, 当且仅当 $\emptyset \vDash \tau$ (又记 $\vDash \tau$)
- 称公式 σ 和 τ **重言等价**, 当且仅当 $\{\sigma\} \vDash \tau$ (又记 $\sigma \vDash \tau$) 且 $\tau \vDash \sigma$

命题逻辑的语义 (续)

容易验证

- 公式 α (至多含 A_1, \dots, A_n) 是重言式, 当且仅当 B_α^n 是值为 1 的常函数
- 公式 σ 和 τ (至多含 A_1, \dots, A_n) 重言等价, 当且仅当

$$B_\sigma^n = B_\tau^n$$

习题

- 2.3.8*, 2.3.9, 2.3.10 (1)
- 2.5.1 - 2.5.3, 2.5.7*, 2.5.8*