

数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

前情提要

- 命题逻辑的语言
 - 符号 (S): 命题符号 (\mathcal{A}), 联词, 辅助符号
 - 表达式 (\mathcal{E})
 - 合式公式 (\mathcal{F})
- 合式公式的递归定义与归纳证明

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α , 下列叙述有且仅有一条适用

- (1) α 是一个命题符号。
- (2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。
- (3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式, \star 为某个二元联词。

不仅如此, 在情形 (2) 和 (3) 中, 公式 α_0 , α_1 和 α_2 还有二元联词 \star 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α , 下列叙述有且仅有一条适用

- (1) α 是一个命题符号。
- (2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。
- (3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式, \star 为某个二元联词。

不仅如此, 在情形 (2) 和 (3) 中, 公式 α_0 , α_1 和 α_2 还有二元联词 \star 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α , 下列叙述有且**仅有**一条适用

- (1) α 是一个命题符号。
- (2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。
- (3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式, \star 为某个二元联词。

不仅如此, 在情形 (2) 和 (3) 中, 公式 α_0 , α_1 和 α_2 还有二元联词 \star 都是唯一的。

命题逻辑公式的唯一可读性

定理

对任意公式 α , 下列叙述有且仅有一条适用

- (1) α 是一个命题符号。
- (2) α 形为 $(\neg\alpha_0)$ 其中 α_0 为一合式公式。
- (3) α 形为 $(\alpha_1 \star \alpha_2)$ 其中 α_1 和 α_2 为合式公式, \star 为某个二元联词。

不仅如此, 在情形 (2) 和 (3) 中, 公式 α_0 , α_1 和 α_2 还有二元联词 \star 都是唯一的。

经典命题逻辑的希尔伯特系统

真即被证明

——数学直觉主义

什么是证明

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- α, β, γ 是元语言符号, 指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- α, β, γ 是元语言符号, 指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 因此，有**无穷**条公理。

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 但我们能机械地判定一个表达式是不是公理 (why?)

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 公式的简写

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- α, β, γ 是元语言符号, 指代任一合式公式

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 因此，有**无穷**条公理。

希尔伯特系统的命题逻辑公理

$$(A1) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$(A2) (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

$$(A3) (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$$

注意

- 但我们能机械地判定一个表达式是不是公理 (why?)

希尔伯特系统的推理规则

分离规则 (*modus ponens*, MP):

从 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的推理规则

分离规则 (*modus ponens*, MP):

从 $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ 可以推出 β

为强调它是纯形式的规则，又称之为变形规则。

希尔伯特系统的证明

定义 (推演/证明/演绎 (deduction))

从公式集 Γ 到公式 φ 的一个推演 (或证明或演绎) 是一个有穷的公式序列 $\langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$, 满足 $\alpha_n = \varphi$ 并且对所有 $i \leq n$ 或者

(a) α_i 属于 $\Gamma \cup \Lambda$; 或者

(b) 存在 $j, k < i$, 使得 $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个定理 (记 $\Gamma \vdash \alpha$), 当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$, 当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$, 则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0 , 有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个定理 (记 $\Gamma \vdash \alpha$), 当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$, 当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$, 则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0 , 有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个定理 (记 $\Gamma \vdash \alpha$), 当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$, 当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$, 则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0 , 有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

希尔伯特系统的证明

- 称 α 是 Γ 的一个定理 (记 $\Gamma \vdash \alpha$), 当且仅当存在一个从 Γ 到 α 的证明
- $\vdash \alpha$, 当且仅当 $\emptyset \vdash \alpha$

一些事实

- 如果 $\Gamma \subset \Delta$ 并且 $\Gamma \vdash \alpha$, 则 $\Delta \vdash \alpha$
- $\Gamma \vdash \alpha$ 当且仅当存在一个 Γ 的有穷子集 Γ_0 , 有 $\Gamma_0 \vdash \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

$$1 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$2 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$3 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$4 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$5 \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

$$1 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$2 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$3 \quad (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$4 \quad \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

$$5 \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

一些元定理

引理

对任意合式公式 α 有, $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

证明.

对每个公式 α , 有如下推演:

- 1 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 2 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- 3 $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 4 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
- 5 $\alpha \rightarrow \alpha$

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

一些元定理

定理 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, 当且仅当 $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

证明.

把已有的推演改造成我想要的推演

(\Leftarrow)

(\Rightarrow)

习题

- 2.4.1*, 2.4.2, 2.4.4*
- 2.6.1, 2.6.2