

# 数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

# 前情提要

- 集合, 外延原理
- 空集, 子集, 真子集, 幂集
- 并, 交, 差, 一般并, 一般交
- 有序对, 卡氏积, 关系
- 准序, 偏序, 全序 (线序)

# 关系

## 定义

令  $R$  是一个二元关系, 我们定义

■  $R$  的 **定义域**:  $\text{dom } R = \{x \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } R(x, y)\}$

■  $R$  的 **值域**:  $\text{ran } R = \{y \mid \text{存在 } x \text{ 使得 } R(x, y)\}$

■  $R$  在集合  $X$  下的 **像**:

$$R[X] = \{y \mid \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } R(x, y)\}$$

■  $R$  在集合  $Y$  下的 **逆像**:

$$R^{-1}[Y] = \{x \mid \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } R(x, y)\}$$

# 关系

## 定义

令  $R, S$  一个二元关系, 我们定义

- $R$  的 **逆**:  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- $R$  和  $S$  的 **复合**:  $S \circ R = \{(x, z) \mid \text{存在 } y \text{ 使得 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in S\}$

注意:  $R^{-1}[X]$  不会出现歧义

# 关系

令  $R, S$  是二元关系。作为集合, 如果  $R \subset S$ , 那么我们称  $S$  是  $R$  的 **延拓**,  $R$  是  $S$  的 **限制**。特别地,

- 如果  $R$  是  $X$  上二元关系且  $R = S \cap X^2$ , 那么我们称  $R$  是  $S$  在  $X$  上的限制, 记  $R = S \upharpoonright X$

此时,  $R[X] = \text{ran}(S \upharpoonright X)$

# 关系

## 例

令  $S$  是整数集  $\mathbb{Z}$  上的后继关系, 即

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j = i + 1\}$$

- $\mathbb{Z}^{-1} = \{(i, j) \mid j = i - 1\}$  是整数上的前驱关系
- $\mathbb{Z} \circ \mathbb{Z} = \{(i, j) \mid j = i + 2\}$
- $S \upharpoonright \mathbb{N}$  是  $\mathbb{N}$  上的后继关系
- $S[\mathbb{N}] = \text{dom}(S \upharpoonright \mathbb{N}) = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

# 等价关系与划分

## 定义 (等价关系)

我们称  $R \subset A^2$  是一个 **等价关系**，当且仅当  $R$  是自返的、传递的以及对称的

## 例

- 等同关系
- 平行关系
- $n \equiv m \pmod{k}$

# 等价关系与划分

## 例

考虑所有人的集合  $P$  上的二元关系:

- $D = \{(x, y) \mid y \text{ 是 } x \text{ 的祖先}\}$
- $B = \{(x, y) \mid x \text{ 和 } y \text{ 有一个共同的祖先}\}$
- $S = \{(x, y) \mid x \text{ 和 } y \text{ 有共同的母亲}\}$



# 等价关系与划分

## 定义

令  $\sim$  是  $X$  上的一个等价关系且  $x \in X$ 。我们定义以  $x$  为代表的  $\sim$  等价类 为集合

$$[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

## 例

- $[x]_{=} = \{x\}$
- 定义  $x \sim y$  当且仅当  $n \equiv m \pmod{2}$ 。则  $[0]_{\sim} = \{n \mid n \text{ 是偶数}\}$ ，而  $[3]_{\sim} = [11]_{\sim}$

# 等价关系与划分

## 引理

令  $\sim$  是  $X$  上的等价关系, 则对任意  $x, y \in X$ , 要么  $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$ , 要么  $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset$

# 等价关系与划分

## 定义

给定集合  $X$  以及  $S \subset P(X)$ 。若  $S$  满足

- 对所有  $a, b \in S$ , 如果  $a \neq b$ , 则  $a \cap b = \emptyset$
- $\bigcup S = X$

则称  $S$  是  $X$  的一个 **划分**

# 等价关系与划分

## 定义

令  $\sim$  为  $X$  上的一个等价关系, 我们定义

$$X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$$

为  $X$  在  $\sim$  下的商集

# 等价关系与划分

## 定理

令  $\sim$  为  $X$  上的一个等价关系。则  $X/\sim$  是  $X$  的一个划分

## 定理

令  $S$  为  $X$  的一个划分。定义  $X$  上二元关系

$$\sim_S = \{(x, y) \in X^2 \mid \text{存在 } Y \in S \text{ 使得 } x, y \in Y\}$$

则  $\sim_S$  是  $X$  上的一个等价关系

# 关系

## 定义 ( $n$ 元有序组)

- 我们称有序对  $(a, b)$  是一个 2 元有序组
- 任给  $x_0, \dots, x_n, x_{n+1}$ , 定义  $n+1$  元有序组  $(x_0, \dots, x_{n+1}) = ((x_0, \dots, x_n), x_{n+1})$

## 事实

对任意  $n$ , 任给  $x_0, \dots, x_{n+1}, y_0, \dots, y_{n+1}$ 。

$(x_0, \dots, x_{n+1}) = (y_0, \dots, y_{n+1})$  当且仅当对每个  $i \leq n+1$  都有  $x_i = y_i$

# 关系

## 定义

- 定义卡氏积  $X_1 \times \cdots \times X_n$

$$= \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{对 } 1 \leq i \leq n, x_i \in X_i\}$$

- 我们称  $R \subset X^n$  是  $X$  上的一个  $n$  元关系
- 令  $R$  是一个  $n$  元关系。我们通常将  $(x_0, \dots, x_n) \in R$  记作  $R(x_1, \dots, x_n)$

# 习题

- 1.5.3、1.5.9



## 习题

- 如果我们只考虑母系祖先。关系  $B = \{(x, y) \mid x \text{ 和 } y \text{ 有一个共同的母系祖先}\}$  是等价关系吗?
- 假设  $\leq$  是  $X$  上的一个准序。定义  $X$  上关系

$$\sim = \{(x, y) \in X^2 \mid x \leq y \text{ 且 } y \leq x\}$$

- 证明  $\sim$  是  $X$  上的等价关系。
- 定义  $X/\sim$  上的关系  $\leq$ , 使得  $[x] \leq [y]$  当且仅当  $x \leq y$ , 并证明  $\leq$  是偏序