数理逻辑

杨睿之

复旦大学哲学学院

2018 年秋季

课程信息

- 时间地点：
  - 周三 9:55 - 11:35，H6212 （授课）
  - 周一 10:50-12:30，H2115 （授课、习题课）
- 网站：

  https://aplacenearby.ggr.fun/mathlogic2018
- 教材：《数理逻辑：证明及其限度》，复旦大学出版社

课程团队

- 杨睿之

  邮箱：yangruizhi@fudan.edu.cn
- 寇亮

  邮箱：17210160031@fudan.edu.cn
- 罗焱元

  邮箱：16210160030@fudan.edu.cn
- 王世逸

  邮箱：wangshiyi14@fudan.edu.cn

前情提要

- 逻辑是关于真的一些普遍的规律
- 数理逻辑即数学的逻辑
- 我们都有具备逻辑思考的能力，那我们又能从这门课学到什么?

本学期我们要做的

- 练习阅读数学定义、定理、证明，撰写数学证明
- 严格地定义什么是定义、什么是真、什么是证明

本学期我们要做的

用数学的方法研究数学的逻辑

作为基础的集合论

- 集合论基于人们关于“集合”概念的直观
- 集合论被广泛接受为当代数学的基础
- 我们将首先在集合论的语言下讲述数理逻辑

直观中的集合

- 一些东西聚在一起组成一个集合
- 若 a 是集合 X 中的对象，我们称 a 是 X 的元素，或 a 属于 X，记作 $a \in X$

直观中的集合

例

- $\{$ 寇亮、罗焱元、王世逸 $\}$
- $\{p \mid p$ 是课程 PHIL130175h.01 的助教$\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 $\emptyset$

直观中的集合

例

- $\{x_1, \dots, x_n\}$
- $\{p \mid p$ 是课程 PHIL130175h.01 的助教$\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 $\emptyset$

直观中的集合

例

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\left\{p \,\middle|\, p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教}\right\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 $\emptyset$

直观中的集合

例

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\left\{x \,\middle|\, \varphi(x)\right\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 $\emptyset$

直观中的集合

例

- $\{x_1, \ldots, x_n\}$
- $\left\{x \,\middle|\, \varphi(x)\right\}$
- 不含任何元素的集合——空集，记作 $\emptyset$

直观中的集合

- 集合是无关排序的

例

$$\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$$

- 对象在集合的描述中出现的次数与集合本身无关

例

$$\{a, a, b\} = \{a, b, b\} = \{a, b\}$$

直观中的集合

集合的外延原理（principle of extensionality）

任给集合 A, B，$A = B$ 当且仅当 A 和 B 有相同的元素。

例

- $\{$ 寇亮、罗淼元、王世逸 $\}$
  $= \{p \mid p$ 是课程 PHIL130175h.01 的助教 $\}$
- 空集是唯一的

直观中的集合

例

一些重要的集合:

- 布尔值集 $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- 自然数集 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- 整数集 $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- 有理数集 $\mathbb{Q} = \left\{ z/n \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \;\&\; n \in \mathbb{N} \;\&\; n \neq 0 \right\}$
- 实数集 $\mathbb{R}$

定义 (子集)

给定集合 A, B。我们称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$，当且仅当任何 A 中的元素都是 B 中的元素。

例

- $\left\{p \,\middle|\, p \text{ 是课程 PHIL130175h.01 的助教}\right\}$
  $\subset \left\{p \,\middle|\, p \text{ 是 PHIL130175h.01 课程团队成员}\right\}$
- $\left\{2n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} - \right\} \subset \mathbb{N}$

事实

- 对任意集合 A, B，$A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$。
- 空集是任何集合的子集

定义 (真子集)

我们称 A 是 B 的 **真子集**，记作 $A \subsetneq B$，当且仅当 $A \subset B$ 且 $A \neq B$。

定义 (幂集)

集合 X 的 **幂集** （记作 $P(X)$ ）是它所有子集组成的集合。

例

列出 $P(\{a, b, c\})$ 的所有元素

定义 (并、交、差)

给定集合 A, B，我们定义

- A 和 B 的 **并**，$A \cup B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 或 } x \in B \right\}$
- A 和 B 的 **交**，$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 且 } x \in B \right\}$
- A 和 B 的 **差**，$A \setminus B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ 而 } x \notin B \right\}$

集合

例

- $\{a, b, c\} \cup \{b, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b, c\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{b, d\} = \{b\}$
- $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b, c\}$

例

- $\{a, b, c\} \cap \{d\} = \emptyset$

若 $A \cap B = \emptyset$，我们称 A 与 B 不交。

记法

- 如果集合 $\mathscr{F}$ 中元素都是集合，我们又称 $\mathscr{F}$ 为 集合族。
- 有时我们会记 $\mathscr{F} = \left\{X_i \mid i \in I\right\}$，其中 I 是一个 下标集。

常见的下标集有 $\{1, \ldots, n\}$，$\mathbb{N}$

例

$\left\{a_i \mid i < n\right\}$，$\left\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\right\}$

集合

令 $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$，则 $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \big((X_1 \cup X_2) \cup X_3\big)$。

定义 (一般并、一般交)

- $\bigcup \mathcal{F} = \left\{x \,\middle|\, \text{存在 } X \in F \text{ 使得 } x \in X\right\}$
- 对 $F \neq \emptyset$,

  $\bigcap \mathcal{F} = \left\{x \,\middle|\, \text{对所有 } X \in F \text{ 都有 } x \in X\right\}$

令 $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$，则 $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \left((X_1 \cup X_2) \cup X_3\right)$。

定义 (一般并、一般交)

- $\bigcup \mathcal{F} = \left\{x \middle|\ \text{存在 } X \in F \text{ 使得 } x \in X\right\}$
- 对 $F \neq \emptyset$，

  $\bigcap \mathcal{F} = \left\{x \middle|\ \text{对所有 } X \in F \text{ 都有 } x \in X\right\}$

记法

令 $\mathcal{F} = \{X_i \mid i \in I\}$，记

- $\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup \mathcal{F}$
- $\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap \mathcal{F} \quad (I \neq \emptyset)$

关系

例 (关系)

- 朋友 / 把……当作朋友
- 相邻
- 序（大小）
- 整除
- 相等

关系

记法

我们用 (a, b) 表示由 a, b 按 a 前 b 后组成的 **有序对**

有序对的直观: 与集合不同，如果 $a \neq b$，我们希望有序对 $(a, b) \neq (b, a)$。更严格地，任给 a_1, a_2, b_1, b_2，我们要求 $(a_1, b_2) = (a_2, b_2)$，当且仅当 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$

定义 (卡氏积)

任给集合 A, B，定义 卡氏积 （Cartesian product）

$$A \times B = \left\{(a, b) \,\middle|\, a \in A \text{ 且 } b \in B\right\}$$

我们记 $A^2 = A \times A = \left\{(a, b) \,\middle|\, a, b \in A\right\}$

关系

定义

我们称 R 是 A, B 之间的一个 二元关系，当且仅当 $R \subset A \times B$；称 R 是 A 上的一个 二元关系，当且仅当 $R \subset A^2$。

记法

我们记 Rab 或 aRb，当且仅当 $(a, b) \in R$

例

$\mathbb{N}$ 上的二元关系：

- 等同关系 $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = \left\{(n, n) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$
- 严格小于关系 $< \; = \left\{(n, m) \;\middle|\; n < m \;\&\; n, m \in \mathbb{N}\right\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), \ldots\}$
- 整除关系 $\left\{(n, m) \;\middle|\; n|m \;\&\; n, m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{(n, m) \;\middle|\; \text{存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } m = n * k\right\}$

定义 (几个关系的性质)

- 关系 $R \subset A^2$ 是 **自返的**，当且仅当对任意 $a \in A$ 有 Raa
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **传递的**，当且仅当对任意 $a, b, c \in A$ 有，Rab 与 Rbc 蕴含 Rac
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **对称的**，当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有，Rab 蕴含 Rba
- 关系 $R \subset A^2$ 是 **反对称的**，当且仅当对任意 $a, b \in A$ 有，Rab 与 Rba 蕴含 $a = b$

定义 (序)

令 $R \subset A^2$

- 若 R 是自反的、传递的，我们称 R 是一个 A 上的 准序 (preorder)
- 若准序 R 是反对称的，则称 R 是一个 A 上的 偏序 (partial order)
- 若偏序 R 满足对任意 $a, b \in A$ 有 aRb 或 bRa，则称 R 是 A 上的一个 全序 或 线序

例

- 整除关系（习题）
- 考虑 $\mathbb{N}^2$ 上的关系：$(n_1, m_2) \preceq (n_2, m_2)$，当且仅当 $n_1 < n_2$，或 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \le m_2$

定义 (等价关系)

我们称 $R \subset A^2$ 是一个 等价关系 ，当且仅当 R 是自返的、传递的以及对称的

例

- 等同关系
- 平行关系
- $n \equiv m \pmod{k}$ （习题）

关系

定义

令 R 是一个二元关系，我们定义

- R 的 **定义域**： $\mathrm{dom}\ R = \left\{x \,\middle|\, \text{存在 } y \text{ 使得 } R(x,y)\right\}$
- R 的 **值域**： $\mathrm{ran}\ R = \left\{y \,\middle|\, \text{存在 } x \text{ 使得 } R(x,y)\right\}$
- R 在集合 X 下的 **像**：

$$R[X] = \left\{y \,\middle|\, \text{存在 } x \in X \text{ 使得 } R(x,y)\right\}$$

- R 在集合 Y 下的 **逆像**：

$$R^{-1}[Y] = \left\{x \,\middle|\, \text{存在 } y \in Y \text{ 使得 } R(x,y)\right\}$$

定义

令 R, S 一个二元关系，我们定义

- R 的 逆： $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- R 和 S 的 复合： $S \circ R = \{(x, z) \mid$ 存在 y 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S\}$

注意：$R^{-1}[X]$ 不会出现歧义

定义 (n 元)

- 我们称有序对 (a, b) 是一个 2 元有序组
- 任给 $x_0, \ldots x_n, x_{n+1}$，定义 $n+1$ 元有序组 $(x_0, \ldots, x_{n+1}) = ((x_0, \ldots, x_n), x_{n+1})$
- 定义卡氏积

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \text{对 } 1 \le i \le n,\ x_i \in X_i\right\}$$

- 我们称 $R \subset X^n$ 是 X 上的一个 n 元关系

习题

- 1.2.3、1.2.4、1.3.2、1.3.3、1.6.1
- 证明：如果 $X \subset Y$，那么 $X \cup Y = Y$
- 举例：R 是对称的也是反对称的
- 验证：自然数集 $\mathbb{N}$ 上的整除关系是偏序。整数集 $\mathbb{Z}$ 上的整除关系呢?