数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

哥德尔完全性定理

- 不动点引理：每个公式 $\beta(v_1)$ 都有一个不动点，句子 σ，使得

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\#sigma)$$

- 原版不完全性定理：如果公理化理论 $T \supset Q$ 是ω 一致的，则 T 不是完全的

令 σ 为 $\neg\,\mathrm{bwb}_T(v_1)$ 的不动点

前情提要

哥德尔完全性定理

- 不动点引理：每个公式 $\beta(v_1)$ 都有一个不动点，句子 σ，使得

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\#sigma)$$

- 原版不完全性定理：如果公理化理论 $T \supset Q$ 是ω 一致的，则 T 不是完全的

  令 σ 为 $\neg\,\mathrm{bwb}_T(v_1)$ 的不动点

前情提要

哥德尔完全性定理

- 不动点引理：每个公式 $\beta(v_1)$ 都有一个不动点，句子 σ，使得

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\#sigma)$$

- 原版不完全性定理：如果公理化理论 $T \supset Q$ 是ω 一致的，则 T 不是完全的

  令 σ 为 $\neg\,\mathrm{bwb}_T(v_1)$ 的不动点

前情提要

哥德尔完全性定理

- 不动点引理：每个公式 $\beta(v_1)$ 都有一个不动点，句子 σ，使得

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\# sigma)$$

- 罗瑟版不完全性定理：如果公理化理论 $T \supset Q$ 是一致的，则 T 不是完全的

考虑 $\exists y\Big[\mathrm{bew}_T(y,x) \wedge (\forall z < y) \neg\, \mathrm{bew}_T(z, \dot{\neg} x)\Big]$ 的不动点

哥德尔第二不完全性定理

哥德尔第二不完全性定理

在第一不完全性定理的证明中：对于某个包涵 Q 的公理化理论 T，我们找到了一个见证 σ，有

$$\text{若 } T \text{ 一致，则 } T \nvdash \sigma$$

如果 T 足够强 到能把这一切“形式化到 T 本身中”：

$$T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$$

哥德尔第二不完全性定理

在第一不完全性定理的证明中：对于某个包涵 Q 的公理化理论 T，我们找到了一个见证 σ，有

$$\text{若 } T \text{ 一致，则 } T \nvdash \sigma$$

如果 T 足够强 到能把这一切 “形式化到 T 本身中”：

$$T \vdash \mathrm{Con}(T) \to \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$$

哥德尔第二不完全性定理

定理 (哥德尔第二不完全性定理)

假设 T 是 足够强的 公理化算术理论，那么如果 T 一致，则 $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$

注意：$\mathrm{Con}(T) =_{\mathrm{df}} \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#0 = 1)$

Proof.

若 $T \vdash \mathrm{Con}(T)$。由于 T 足够强，$T \vdash \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$。由 σ 是所选不动点，$T \vdash \sigma$。再由 T 足够强，$T \vdash \mathrm{bwb}_T \#\sigma$

哥德尔第二不完全性定理

定理 (哥德尔第二不完全性定理)

假设 T 是 足够强的 公理化算术理论，那么如果 T 一致，则 $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$

注意：$\mathrm{Con}(T) =_{\mathrm{df}} \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#0 = 1)$

Proof.

若 $T \vdash \mathrm{Con}(T)$。由于 T 足够强，$T \vdash \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$。由 σ 是所选不动点，$T \vdash \sigma$。再由 T 足够强，$T \vdash \mathrm{bwb}_T \#\sigma$

哥德尔第二不完全性定理

定理 (哥德尔第二不完全性定理)

假设 T 是 足够强的 公理化算术理论，那么如果 T 一致，则 $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$

注意：$\mathrm{Con}(T) =_{\mathrm{df}} \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#0 = 1)$

Proof.

若 $T \vdash \mathrm{Con}(T)$。由于 T 足够强，$T \vdash \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$。由 σ 是所选不动点，$T \vdash \sigma$。再由 T 足够强，$T \vdash \mathrm{bwb}_T \#\sigma$

哥德尔第二不完全性定理

定理 (哥德尔第二不完全性定理)

假设 T 是 足够强的 公理化算术理论，那么如果 T 一致，则 $T \nvdash \mathsf{Con}(T)$

注意：$\mathsf{Con}(T) =_{\mathsf{df}} \neg\, \mathsf{bwb}_T(\#0 = 1)$

Proof.

若 $T \vdash \mathsf{Con}(T)$。由于 T 足够强，$T \vdash \neg\, \mathsf{bwb}_T(\#\sigma)$。由 σ 是所选不动点，$T \vdash \sigma$。再由 T 足够强，$T \vdash \mathsf{bwb}_T \#\sigma$

哥德尔第二不完全性定理

定理 (哥德尔第二不完全性定理)

假设 T 是 足够强的 公理化算术理论，那么如果 T 一致，则 $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$

注意：$\mathrm{Con}(T) =_{\mathrm{df}} \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#0 = 1)$

Proof.

若 $T \vdash \mathrm{Con}(T)$。由于 T 足够强，$T \vdash \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$。由 σ 是所选不动点，$T \vdash \sigma$。再由 T 足够强，$T \vdash \mathrm{bwb}_T \#\sigma$

哥德尔第二不完全性定理

定理 (哥德尔第二不完全性定理)

假设 T 是 足够强的 公理化算术理论，那么如果 T 一致，则 $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$

注意：$\mathrm{Con}(T) =_{\mathrm{df}} \neg\,\mathrm{bwb}_T(\#0 = 1)$

Proof.

若 $T \vdash \mathrm{Con}(T)$。由于 T 足够强，$T \vdash \neg\,\mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$。由 σ 是所选不动点，$T \vdash \sigma$。再由 T 足够强，$T \vdash \mathrm{bwb}_T\,\#\sigma$

哥德尔第二不完全性定理

定义 (可证性条件)

一个公理化理论 T 所谓 足够强，是指 $T \supseteq Q$，且满足下述 可证性条件：对任意闭语句 σ，

D1 若 $T \vdash \sigma$，则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$

D2 若 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bwb}_T(\#\sigma) \to \mathrm{bwb}_T(\#\tau)$

D3 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma) \to \mathrm{bwb}_T(\# \mathrm{bwb}_T(\#\sigma))$

哥德尔第二不完全性定理

定义 (可证性条件)

一个公理化理论 T 所谓 **足够强**，是指 $T \supseteq Q$，且满足下述 **可证性条件**：对任意闭语句 σ，

- D1 若 $T \vdash \sigma$，则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$
- D2 若 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bwb}_T(\#\sigma) \to \mathrm{bwb}_T(\#\tau)$
- D3 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma) \to \mathrm{bwb}_T(\#\,\mathrm{bwb}_T(\#\sigma))$

哥德尔第二不完全性定理

定义 (可证性条件)

一个公理化理论 T 所谓 足够强，是指 $T \supseteq Q$，且满足下述 可证性条件：对任意闭语句 σ，

D1 若 $T \vdash \sigma$，则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$

D2 若 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bwb}_T(\#\sigma) \to \mathrm{bwb}_T(\#\tau)$

D3 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma) \to \mathrm{bwb}_T(\#\,\mathrm{bwb}_T(\#\sigma))$

哥德尔第二不完全性定理

引理

PA 足够强

PA 满足 D1：

由可表示定理

哥德尔第二不完全性定理

引理

PA 足够强

PA 满足 D1：

由可表示定理

哥德尔第二不完全性定理

PA 满足 D2：

只需证明：

$$\mathrm{bew}_T(x, \#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma) \to \mathrm{bew}_T(x * y * \langle \#\tau \rangle, \#\tau)$$

在 PA 中可证

关键：PA 递归可表示、归纳法的运用

哥德尔第二不完全性定理

PA 满足 D2：

只需证明：

$$\mathrm{bew}_T(x, \#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma) \to \mathrm{bew}_T(x * y * \langle \#\tau \rangle, \#\tau)$$

在 PA 中可证

关键：PA 递归可表示、归纳法的运用

哥德尔第二不完全性定理

PA 满足 D2：

只需证明：

$$\mathrm{bew}_T(x, \#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma) \to \mathrm{bew}_T(x * y * \langle \#\tau \rangle, \#\tau)$$

在 PA 中可证

关键：PA 递归可表示、归纳法的运用

哥德尔第二不完全性定理

PA 满足 D2：

只需证明：

$$\mathrm{bew}_T(x, \#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma) \to \mathrm{bew}_T(x * y * \langle \#\tau \rangle, \#\tau)$$

在 PA 中可证

关键：PA 递归可表示、归纳法的运用

哥德尔第二不完全性定理

PA 满足 D2：

只需证明：

$$\mathrm{bew}_T(x, \#(\sigma \to \tau)) \to \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma) \to \mathrm{bew}_T(x * y * \langle \#\tau \rangle, \#\tau)$$

在 PA 中可证

关键：PA 递归可表示、归纳法的运用

习题： 10.2.1、10.4.2、10.4.4*