数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

“可证”是递归可枚举的

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

"可证"是递归可枚举的

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

“可证”是递归可枚举的

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

“可证”是递归可枚举的

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

“可证”是递归可枚举的

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

“可证”是递归可枚举的

前情提要

语法的算术化：哥德尔编码

我们证明了在哥德尔编码下，下列集合/关系/函数是可表示的

- 变元、项、原子公式、合式公式
- 替换、自由出现、闭语句、可替换
- 逻辑公理、证明

“可证”是递归可枚举的

我们已经知道如何用算术语言表达“n（所编码的公式）可证”：

$$\mathrm{bwb}_Q(n)$$

现在我们希望说：

我不可证

我们已经知道如何用算术语言表达“n（所编码的公式）可证”：

$$\mathrm{bwb}_Q(n)$$

现在我们希望说：

我不可证

不动点引理

引理 (不动点引理)

任给公式 $\beta(v_1)$，其中至多有变元 v_1 自由出现，我们可以能行地找到一个闭语句 σ，使得

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\#\sigma)$$

不动点引理

Proof.

- 函数 $f(n) = \#n$ 是递归的
- 函数 $g(m, n) = \mathrm{Sb}(m, 21, f(n))$ 是递归的

  特别地：$g(\#\alpha, n) = \#(\alpha_n^{v_1})$

  令 $\theta(v_1, v_2, v_3)$ 表示 g：对任意 $m, n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash \forall v_3 \big[\theta(m, n, v_3) \leftrightarrow v_3 = g(m, n) \big]$$

不动点引理

Proof.

- 函数 $f(n) = \# n$ 是递归的
- 函数 $g(m, n) = \mathrm{Sb}(m, 21, f(n))$ 是递归的

  特别地：$g(\#\alpha, n) = \#(\alpha_n^{v_1})$

  令 $\theta(v_1, v_2, v_3)$ 表示 g：对任意 $m, n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash \forall v_3 \Big[\theta(m, n, v_3) \leftrightarrow v_3 = g(m, n) \Big]$$

不动点引理

Proof.

- 函数 $f(n) = \#n$ 是递归的
- 函数 $g(m,n) = \mathrm{Sb}(m, 21, f(n))$ 是递归的

  特别地：$g(\#\alpha, n) = \#(\alpha_n^{v_1})$

  令 $\theta(v_1, v_2, v_3)$ 表示 g：对任意 $m, n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash \forall v_3 \big[\theta(m, n, v_3) \leftrightarrow v_3 = g(m, n)\big]$$

不动点引理

Proof.

- 函数 $f(n) = \#n$ 是递归的
- 函数 $g(m, n) = \mathrm{Sb}(m, 21, f(n))$ 是递归的

  特别地：$g(\#\alpha, n) = \#(\alpha_n^{v_1})$

  令 $\theta(v_1, v_2, v_3)$ 表示 g：对任意 $m, n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash \forall v_3 \left[\theta(m, n, v_3) \leftrightarrow v_3 = g(m, n)\right]$$

不动点引理

Proof.

- 函数 $f(n) = \# n$ 是递归的
- 函数 $g(m, n) = \mathrm{Sb}(m, 21, f(n))$ 是递归的

  特别地：$g(\#\alpha, n) = \#(\alpha_n^{v_1})$

  令 $\theta(v_1, v_2, v_3)$ 表示 g：对任意 $m, n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash \forall v_3 \Big[\theta(m, n, v_3) \leftrightarrow v_3 = g(m, n)\Big]$$

不动点引理

Proof.

- 令 $\tau(v_1) =_{\text{df}}$ "$\beta(g(v_1, v_1))$" $= \forall v_3\left[\theta(v_1, v_1, v_3) \rightarrow \beta(v_3)\right]$
  则对任意公式 $\alpha(v_1)$：
  $$Q \vdash \tau(\#\alpha) \leftrightarrow \beta(\#\alpha(\#\alpha))$$
- 特别地 $Q \vdash \tau(\#\tau) \leftrightarrow \beta(\#\tau(\#\tau))$
  令 $\sigma =_{\text{df}} \tau(\#\tau)$，则 $\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$，$\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$

不动点引理

Proof.

- 令 $\tau(v_1) =_{\text{df}}$ "$\beta(g(v_1, v_1))$"$= \forall v_3 \big[\theta(v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3)\big]$
  则对任意公式 $\alpha(v_1)$：
  $$Q \vdash \tau(\#\alpha) \leftrightarrow \beta(\#\alpha(\#\alpha))$$
- 特别地 $Q \vdash \tau(\#\tau) \leftrightarrow \beta(\#\tau(\#\tau))$
  令 $\sigma =_{\text{df}} \tau(\#\tau)$，则 $\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$，$\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$

不动点引理

Proof.

- 令 $\tau(v_1) =_{\mathrm{df}}$ “$\beta(g(v_1, v_1))$”$= \forall v_3\big[\theta(v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3)\big]$
  则对任意公式 $\alpha(v_1)$：

$$Q \vdash \tau(\#\alpha) \leftrightarrow \beta(\#\alpha(\#\alpha))$$

- 特别地 $Q \vdash \tau(\#\tau) \leftrightarrow \beta(\#\tau(\#\tau))$
  令 $\sigma =_{\mathrm{df}} \tau(\#\tau)$，则 $\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$，$\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$

不动点引理

Proof.

- 令 $\tau(v_1) =_{\text{df}}$ "$\beta(g(v_1, v_1))$"$= \forall v_3 \big[\theta(v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3)\big]$
  则对任意公式 $\alpha(v_1)$：

$$Q \vdash \tau(\#\alpha) \leftrightarrow \beta(\#\alpha(\#\alpha))$$

- 特别地 $Q \vdash \tau(\#\tau) \leftrightarrow \beta(\#\tau(\#\tau))$
  令 $\sigma =_{\text{df}} \tau(\#\tau)$，则 $\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$，$\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$

不动点引理

Proof.

- 令 $\tau(v_1) =_{\mathrm{df}}$ “$\beta(g(v_1, v_1))$”$= \forall v_3\big[\theta(v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3)\big]$
  则对任意公式 $\alpha(v_1)$：
  $$Q \vdash \tau(\#\alpha) \leftrightarrow \beta(\#\alpha(\#\alpha))$$
- 特别地 $Q \vdash \tau(\#\tau) \leftrightarrow \beta(\#\tau(\#\tau))$
  令 $\sigma =_{\mathrm{df}} \tau(\#\tau)$，则 $\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$，$\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$

不动点引理

Proof.

- 令 $\tau(v_1) =_{\mathrm{df}}$ “$\beta(g(v_1, v_1))$”$= \forall v_3\big[\theta(v_1, v_1, v_3) \to \beta(v_3)\big]$
  则对任意公式 $\alpha(v_1)$：

$$Q \vdash \tau(\#\alpha) \leftrightarrow \beta(\#\alpha(\#\alpha))$$

- 特别地 $Q \vdash \tau(\#\tau) \leftrightarrow \beta(\#\tau(\#\tau))$
  令 $\sigma =_{\mathrm{df}} \tau(\#\tau)$，则 $\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$，$\#\sigma = \#\tau(\#\tau)$

塔斯基定理

定理 (塔斯基真不可定义)

集合 $\# \operatorname{Th} \mathfrak{N}$ 在结构 $\mathfrak{N}$ 中不可定义

Proof.

假设 $\beta(v_1)$ 定义了 $\# \operatorname{Th} \mathfrak{N}$。令 σ 是 $\neg\beta$ 的不动点：

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\beta(\#\sigma)$$

σ 似乎在说："我是假的"

定理 (塔斯基真不可定义)

集合 $\# \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 在结构 $\mathfrak{N}$ 中不可定义

Proof.

假设 $\beta(v_1)$ 定义了 $\# \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$。令 σ 是 $\neg\beta$ 的不动点：

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\beta(\#\sigma)$$

σ 似乎在说："我是假的"

塔斯基定理

定理 (塔斯基真不可定义)

集合 $\#\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 在结构 $\mathfrak{N}$ 中不可定义

Proof.

假设 $\beta(v_1)$ 定义了 $\#\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$。令 σ 是 $\neg\beta$ 的不动点：

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\beta(\#\sigma)$$

σ 似乎在说："我是假的"

塔斯基定理

定理 (塔斯基真不可定义)

集合 $\#\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 在结构 $\mathfrak{N}$ 中不可定义

Proof.

假设 $\beta(v_1)$ 定义了 $\#\,\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$。令 σ 是 $\neg\beta$ 的不动点：

$$Q \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\beta(\#\sigma)$$

σ 似乎在说："我是假的"

- 塔斯基定理：如果 T 是一个可公理化的真的算术理论（$T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$），那么 T 是不完全的
- 哥德尔不完全性定理原始版本：如果 $T \supseteq Q$ 是一个ω一致的理论，那么 T 是不完全的
- 哥德尔不完全性定理罗瑟改进版：如果 $T \supseteq Q$ 是一个一致的理论，那么 T 是不完全的

- 塔斯基定理：如果 T 是一个可公理化的真的算术理论（$T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$），那么 T 是不完全的
- 哥德尔不完全性定理原始版本：如果 $T \supseteq Q$ 是一个ω一致的理论，那么 T 是不完全的
- 哥德尔不完全性定理罗瑟改进版：如果 $T \supseteq Q$ 是一个一致的理论，那么 T 是不完全的

- 塔斯基定理：如果 T 是一个可公理化的真的算术理论（$T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$），那么 T 是不完全的
- 哥德尔不完全性定理原始版本：如果 $T \supseteq Q$ 是一个ω一致的理论，那么 T 是不完全的
- 哥德尔不完全性定理罗瑟改进版：如果 $T \supseteq Q$ 是一个一致的理论，那么 T 是不完全的

ω 一致与不完全性定理

定义 (ω 一致，ω-consistency)

令 T 是一个 $\mathcal{L}_{ar}$ 理论，我们称 T 是ω 不一致的，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}_{ar}$ 公式 $\varphi(x)$，使得 $T \vdash \exists x \varphi(x)$，但对每个 $n \in \mathbb{N}$，$T \vdash \neg\varphi(n)$

我们称 T 是 ω 一致的，当且仅当它不是 ω 不一致的

ω 一致与不完全性定理

定义 (ω 一致，ω-consistency)

令 T 是一个 $\mathcal{L}_{ar}$ 理论，我们称 T 是ω 不一致的，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}_{ar}$ 公式 $\varphi(x)$，使得 $T \vdash \exists x\varphi(x)$，但对每个 $n \in \mathbb{N}$，$T \vdash \neg\varphi(n)$

我们称 T 是 ω 一致的，当且仅当它不是 ω 不一致的

ω 一致与不完全性定理

- 如果 $T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$，那么 T 是 ω 一致的
- 如果 T 是 ω 一致的，那么 T 就是一致的
- ω 一致不是纯粹语法概念，不能用一阶算术语言表达
- 假设哥德尔第二不完全性定理成立且 PA 一致，那么 $\mathrm{PA} + \neg\,\mathrm{Con}(PA)$ 是一致的，但不是 ω 一致的

ω 一致与不完全性定理

- 如果 $T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$，那么 T 是 ω 一致的
- 如果 T 是 ω 一致的，那么 T 就是一致的
- ω 一致不是纯粹语法概念，不能用一阶算术语言表达
- 假设哥德尔第二不完全性定理成立且 PA 一致，那么 $\mathrm{PA} + \neg\,\mathrm{Con}(PA)$ 是一致的，但不是 ω 一致的

ω 一致与不完全性定理

- 如果 $T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$，那么 T 是 ω 一致的
- 如果 T 是 ω 一致的，那么 T 就是一致的
- ω 一致不是纯粹语法概念，不能用一阶算术语言表达
- 假设哥德尔第二不完全性定理成立且 PA 一致，那么 $\mathrm{PA} + \neg\,\mathrm{Con}(PA)$ 是一致的，但不是 ω 一致的

ω 一致与不完全性定理

- 如果 $T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$，那么 T 是 ω 一致的
- 如果 T 是 ω 一致的，那么 T 就是一致的
- ω 一致不是纯粹语法概念，不能用一阶算术语言表达
- 假设哥德尔第二不完全性定理成立且 PA 一致，那么 $\mathrm{PA} + \neg\,\mathrm{Con}(PA)$ 是一致的，但不是 ω 一致的

ω 一致与不完全性定理

定理 (哥德尔第一不完全性定理，原始版)

令 $T \supseteq Q$ 是可公理化的，如果 T 是 ω 一致的，那么 T 是不完全的

ω 一致与不完全性定理

Proof.

- 由于 T 是可公理化的，“y 编码了一个对 $\natural_e(x)$ 的 T 证明”是可表示的。令 $\mathrm{bew}_T(y,x)$ 在 T 中表示该关系。令 $\mathrm{bwb}_T(x) =_{\mathrm{df}} \exists y\, \mathrm{bew}_T(y,x)$。
- 对 $\neg\, \mathrm{bwb}_T$ 用不动点引理找到 σ：

$$T \vdash \sigma \to \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$$

σ 好像是说“我在 T 中不可证””

ω 一致与不完全性定理

Proof.

- 由于 T 是可公理化的，"y 编码了一个对 $\natural_e(x)$ 的 T 证明" 是可表示的。令 $\mathrm{bew}_T(y, x)$ 在 T 中表示该关系。

  令 $\mathrm{bwb}_T(x) =_{\mathrm{df}} \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, x)$。

- 对 $\neg\, \mathrm{bwb}_T$ 用不动点引理找到 σ：

$$T \vdash \sigma \to \neg\, \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$$

σ 好像是说 "我在 T 中不可证""

ω 一致与不完全性定理

Proof.

- 由于 T 是可公理化的，“y 编码了一个对 $\natural_e(x)$ 的 T 证明”是可表示的。令 $\mathrm{bew}_T(y,x)$ 在 T 中表示该关系。令 $\mathrm{bwb}_T(x) =_{\mathrm{df}} \exists y\, \mathrm{bew}_T(y,x)$。
- 对 $\neg\,\mathrm{bwb}_T$ 用不动点引理找到 σ：

$$T \vdash \sigma \to \neg\,\mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$$

σ 好像是说“我在 T 中不可证””

ω 一致与不完全性定理

Proof.

- 由于 T 是可公理化的，“y 编码了一个对 $\natural_e(x)$ 的 T 证明”是可表示的。令 $\mathrm{bew}_T(y, x)$ 在 T 中表示该关系。令 $\mathrm{bwb}_T(x) =_{\mathrm{df}} \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, x)$。
- 对 $\neg\,\mathrm{bwb}_T$ 用不动点引理找到 σ：

$$T \vdash \sigma \to \neg\,\mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$$

σ 好像是说“我在 T 中不可证””

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

ω 一致与不完全性定理

由 T 是 ω 一致的，推得 σ 是独立于 T 的：

- 若 $T \vdash \sigma$：

  则 $T \vdash \mathrm{bwb}_T(\#\sigma)$，则 $T \vdash \neg\sigma$

- 若 $T \vdash \neg\sigma$：

  则 $T \vdash \exists y\, \mathrm{bew}_T(y, \#\sigma)$

  则存在 $n \in \mathbb{N}$，$T \nvdash \neg\, \mathrm{bew}_T(n, \#\sigma)$ [由 ω 一致]

  故 $T \vdash \sigma$

罗瑟的改进

定理 (哥德尔第一不完全性定理，罗瑟（Rosser）版)

令 $T \supseteq Q$ 是可公理化的。如果 T 是一致的，那么 T 是不完全的

罗瑟的改进

Proof.

- 令 $\text{prov}_T(x)$ 为

$$\exists y\Big[\text{bew}_T(y,x) \wedge (\forall z < y)\neg\,\text{bew}_T(z, \dot\neg x)\Big]$$

- 令 σ 是 $\neg\,\text{prov}$ 的不动点
- 证明 $T \vdash \sigma$、$T \vdash \neg\sigma$ 都不可能

罗瑟的改进

Proof.

- 令 $\mathrm{prov}_T(x)$ 为

$$\exists y\Big[\,\mathrm{bew}_T(y,x) \land (\forall z < y)\neg\,\mathrm{bew}_T(z,\dot{\neg}x)\Big]$$

- 令 σ 是 $\neg\,\mathrm{prov}$ 的不动点
- 证明 $T \vdash \sigma$、$T \vdash \neg\sigma$ 都不可能

罗瑟的改进

Proof.

- 令 $\mathrm{prov}_T(x)$ 为

$$\exists y\left[\,\mathrm{bew}_T(y,x) \wedge (\forall z < y)\neg\,\mathrm{bew}_T(z, \dot{\neg} x)\right]$$

- 令 σ 是 $\neg\,\mathrm{prov}$ 的不动点
- 证明 $T \vdash \sigma$、$T \vdash \neg\sigma$ 都不可能

习题： 9.4