数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

可表示性：

- 定理：可表示性与递归的等价关系
- 编码：运用加法和乘法编码“有穷序列”，从而证明可表示性在原始递归构造下封闭
  - 中国剩余定理

前情提要

可表示性：

- 定理：可表示性与递归的等价关系
- 编码：运用加法和乘法编码“有穷序列”，从而证明可表示性在原始递归构造下封闭
    - 中国剩余定理

前情提要

可表示性：

- 定理：可表示性与递归的等价关系
- 编码：运用加法和乘法编码“有穷序列”，从而证明可表示性在原始递归构造下封闭
    - 中国剩余定理

语法算术化

我们试图用在算术的语言中谈论一阶逻辑的语法。特别地，我们希望用算术的语言说诸如“我在 PA 中不可证”

为此，我们（在元语言中）定义一个映射 $\#$，将语法对象对应于算术对象。

语法算术化

我们试图用在算术的语言中谈论一阶逻辑的语法。特别地，我们希望用算术的语言说诸如“我在 PA 中不可证”

为此，我们（在元语言中）定义一个映射 $\#$，将语法对象对应于算术对象。

语法算术化

符号：$\zeta \to \#\zeta$

$\forall$	1	$\neg$	15
0	3	$\to$	17
S	5	$=$	19
$+$	7	v_0	21
$\cdot$	9	$\vdots$	$\vdots$
(	11	v_i	$2i+21$
)	13	$\vdots$	$\vdots$

语法算术化

符号：$\zeta \to \#\zeta$

$\forall$	1	$\neg$	15
0	3	$\to$	17
S	5	$=$	19
$+$	7	v_0	21
$\cdot$	9	$\vdots$	$\vdots$
$($	11	v_i	$2i+21$
$)$	13	$\vdots$	$\vdots$

语法算术化

符号：$\zeta \to \#\zeta$

$\forall$	1	$\neg$	15
0	3	$\to$	17
S	5	$=$	19
$+$	7	v_0	21
$\cdot$	9	$\vdots$	$\vdots$
(	11	v_i	$2i+21$
)	13	$\vdots$	$\vdots$

语法算术化

表达式（有穷符号序列）：

$$\#(s_0 \ldots, s_n) = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle$$

$$= p_0^{\#s_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\#s_n+1}$$

语法算术化

表达式（有穷符号序列）：

$$\begin{aligned}\#(s_0 \ldots, s_n) &= \langle s_0, \ldots, s_n \rangle \\ &= p_0^{\#s_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\#s_n+1}\end{aligned}$$

语法算术化

- 表达式集合： $\#\Phi = \left\{\#s \,\middle|\, s \in \Phi\right\}$

  注意：$\#\Phi$ 是自然数的集合，而不是一个自然数

- 表达式的有穷序列：$\#(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \langle\alpha_0, \ldots, \alpha_n\rangle$

语法算术化

- 表达式集合： $\#\Phi = \left\{\#s \,\middle|\, s \in \Phi\right\}$

  注意：$\#\Phi$ 是自然数的集合，而不是一个自然数

- 表达式的有穷序列：$\#(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$

语法算术化

- 表达式集合： $\#\Phi = \left\{\#s \,\middle|\, s \in \Phi\right\}$

  注意：$\#\Phi$ 是自然数的集合，而不是一个自然数

- 表达式的有穷序列：$\#(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$

语法算术化

为了叙述方便，我们再（在元语言中）定义一系列“解码”函数：

- 对任意符号 s，令 $\natural_s(\#s) = s$；对其他数字 n，令 $\natural_s(n) = 0$
- $\natural_e(n) = \left(\natural_s(n)_0, \ldots, \natural_s(n)_{\mathrm{lh}(n)-1}\right)$
- $\natural_{seq}(m) = \left(\natural_e(m)_0, \ldots, \natural_e(m)_{\mathrm{lh}(m)-1}\right)$
- $\natural_{set}(S) = \left\{\natural_e(n) \mid n \in S\right\}$

语法算术化

接下来，我们要证明一系列有关一阶逻辑语法的性质、函数是递归的，从而是可表示的

语法算术化

- $\mathcal{V} = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \natural_s(n)\text{是一个变元} \right\}$
- $\mathcal{T} = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \natural_e(n)\text{ 是一个项 } \right\}$
- $\mathcal{AF} = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \natural_e(n)\text{ 是一个原子公式 } \right\}$
- $\mathcal{WFF} = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \natural_e(n)\text{ 是一个公式 } \right\}$

注意 $\mathcal{T} \cap \mathcal{AF} = \emptyset$, $\mathcal{AF} \subseteq \mathcal{WFF}$

语法算术化

分解函数：

$$
\mathrm{dc}(n) = \begin{cases}
\langle \# t_1, \ldots, \# t_n \rangle & \text{若 } \natural_e(n) = f t_1 \ldots t_k \in \mathcal{T} \\
\langle \# t_1, \ldots, \# t_n \rangle & \text{若 } \natural_e(n) = P t_1 \ldots t_k \in \mathcal{AF} \\
\# \beta & \text{若 } \natural_e(n) = (\neg \beta) \\
\langle \# \beta, \# \gamma \rangle & \text{若 } \natural_e(n) = (\beta \to \gamma) \\
\langle \# x, \# \beta \rangle & \text{若 } \natural_e(n) = \forall x \beta \\
0 & \text{否则}
\end{cases}
$$

语法算术化

替换函数：令 α 是公式或项，x 是变元，t 是项。我们希望

$$\mathsf{Sb}(\#\alpha, \#x, \#t) = \#(\alpha^x_t)$$

语法算术化

- 自由出现：

  $\left\{(n, m) \,\middle|\, \text{变元 } \natural_s(n) \text{ 在项或公式 } \natural_e(m) \text{ 中自由出现}\right\}$

- （闭）语句：

  $\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \natural_e(n) \text{ 是闭语句 }\right\}$

- 可替换：

  $\left\{(n_1, n_2, n_3) \,\middle|\, \text{项 } \natural_e(n_3) \text{ 可替换公式 } \natural_e(n_1) \text{ 中的变元 } \natural_s(n_2)\right\}$

语法算术化

- 自由出现：

  $\left\{(n, m) \,\middle|\, \text{变元 } \natural_s(n) \text{ 在项或公式 } \natural_e(m) \text{ 中自由出现}\right\}$

- （闭）语句：

  $\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \natural_e(n) \text{ 是闭语句 }\right\}$

- 可替换：

  $\left\{(n_1, n_2, n_3) \,\middle|\, \text{项 } \natural_e(n_3) \text{ 可替换公式 } \natural_e(n_1) \text{ 中的变元 } \natural_s(n_2)\right\}$

语法算术化

- 自由出现：

  $\left\{(n, m) \;\middle|\; \text{变元 } \natural_s(n) \text{ 在项或公式 } \natural_e(m) \text{ 中自由出现}\right\}$

- （闭）语句：

  $\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \natural_e(n) \text{ 是闭语句 }\right\}$

- 可替换：

  $\left\{(n_1, n_2, n_3) \;\middle|\; \text{项 } \natural_e(n_3) \text{ 可替换公式 } \natural_e(n_1) \text{ 中的变元 } \natural_s(n_2)\right\}$

语法算术化

接下来，我们将讨论诸如 Q 中的证明概念的算术化，并证明：

$$\left\{(n, m) \mid \natural_{seq}(n)\text{是从 } Q \text{ 到}\natural_e(m)\text{的证明}\right\}$$

是递归的

语法算术化

逻辑公理集是递归的

约定

我们称一个公式集 Σ 是递归的，当且仅当 $\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \natural_e(n) \in \Sigma \right\}$ 是递归的

语法算术化

逻辑公理集是递归的

约定

我们称一个公式集 Σ 是递归的，当且仅当 $\{n \in \mathbb{N} \mid \natural_e(n) \in \Sigma\}$ 是递归的

语法算术化

- 全称概括关系：$\left\{(n, m) \,\middle|\, \natural_e(n) \text{ 是 } \natural_e(m) \text{ 的全称概括} \right\}$
- 命题逻辑公理：
  - $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  - $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$
  - $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \big((\neg\beta \to \alpha) \to \beta\big)$

语法算术化

- 全称概括关系：$\left\{(n,m) \,\middle|\, \natural_e(n)\text{ 是 }\natural_e(m)\text{ 的全称概括}\right\}$
- 命题逻辑公理：
  - $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  - $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$
  - $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \big((\neg\beta \to \alpha) \to \beta\big)$

语法算术化

- 全称概括关系：$\left\{(n,m) \,\middle|\, \natural_e(n) \text{ 是 } \natural_e(m) \text{ 的全称概括} \right\}$
- 命题逻辑公理：
  - $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  - $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\big)$
  - $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \big((\neg\beta \to \alpha) \to \beta\big)$

语法算术化

- 量词公理：
  - $\forall x\alpha \to \alpha_t^x$，其中 t 可替换 α 中的 x
  - $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
  - $\alpha \to \forall x\alpha$，$x$ 不在 α 中自由出现
- 等词公理：
  - $x = x$
  - $x = y \to \alpha \to \alpha'$，$\alpha$ 是原子公式，α' 是部分替换 α 中 x 为 y 所得

语法算术化

令 T 是一个可判定的句子集（公理化理论），则

$$\mathrm{bew}_T = \left\{(n, m) \,\middle|\, \natural_{seq}(n)\text{是一个 } T \text{ 到}\natural_e\text{的证明}\right\}$$

是递归的

$$\mathrm{bwb}_T(m) =_{\mathrm{df}} \exists n \, \mathrm{bew}_T(n, m)$$

是递归可枚举的

语法算术化

令 T 是一个可判定的句子集（公理化理论），则

$$\mathrm{bew}_T = \left\{(n,m) \;\middle|\; \natural_{seq}(n)\text{是一个 } T \text{ 到}\natural_e\text{的证明}\right\}$$

是递归的

$$\mathrm{bwb}_T(m) =_{\mathrm{df}} \exists n\, \mathrm{bew}_T(n,m)$$

是递归可枚举的

习题：