数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

可表示函数：

- 若 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{n})^{\mathfrak{N}}$，则函数 f_t 是函数可表示的
- 因而，原始递归函数的初始函数、加法、乘法等都是函数可表示的
- 函数可表示在函数复合下封闭
- 若 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 是满足正则性质的可表示关系，那么 $f(\bar{n}) = \mu m P(\bar{n}, m)$ 是函数可表示的

前情提要

可表示函数：

- 若 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{n})^{\mathfrak{N}}$，则函数 f_t 是函数可表示的
- 因而，原始递归函数的初始函数、加法、乘法等都是函数可表示的
- 函数可表示在函数复合下封闭
- 若 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 是满足正则性质的可表示关系，那么 $f(\bar{n}) = \mu m P(\bar{n}, m)$ 是函数可表示的

前情提要

可表示函数：

- 若 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{n})^{\mathfrak{N}}$，则函数 f_t 是函数可表示的
- 因而，原始递归函数的初始函数、加法、乘法等都是函数可表示的
- 函数可表示在函数复合下封闭
- 若 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 是满足正则性质的可表示关系，那么 $f(\bar{n}) = \mu m P(\bar{n}, m)$ 是函数可表示的

前情提要

可表示函数：

- 若 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{n})^{\mathfrak{N}}$，则函数 f_t 是函数可表示的
- 因而，原始递归函数的初始函数、加法、乘法等都是函数可表示的
- 函数可表示在函数复合下封闭
- 若 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 是满足正则性质的可表示关系，那么 $f(\bar{n}) = \mu m P(\bar{n}, m)$ 是函数可表示的

通过原始递归定义的函数怎么办？

假设，$g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 和 $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ 是可表示的，定义

$$f(\bar{m}, 0) = g(\bar{m})$$

$$f(\bar{m}, n+1) = h(\bar{m}, n, f(\bar{m}, n))$$

f 也是可表示的吗？

原始递归可表示

如果我们扩展系统 Q，添加符号 E 以及乘方的定义公理：

(E1) $xE0 = 1$

(E2) $xESy = xEy \cdot x$

得到系统 Q_E。

容易证明，$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$、$(x)_y$ 是 Q_E 可表示

原始递归可表示

如果我们扩展系统 Q，添加符号 E 以及乘方的定义公理：

(E1) $xE0 = 1$

(E2) $xESy = xEy \cdot x$

得到系统 Q_E。

容易证明，$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$、$(x)_y$ 是 Q_E 可表示

原始递归可表示

那么可以定义

$f(\bar{m}, n) = (\mu s[(s)_0 = g(\bar{m}) \wedge \forall x < n (s)_{x+1} = h(\bar{m}, x, h(\bar{m}, x))])_n$

由 $(x)_y$, g 和 h 可表示，以及可表示在布尔运算、函数复合、正则极小算子下封闭（正则性质易证），f 也是 Q_E 可表示的

因此，只需要证明、乘方运算在 Q 中可表示，变可得 Q 中可表示在原始递归下封闭。

但乘方运算本身是通过原始递归得到的

原始递归可表示

那么可以定义

$$f(\bar{m}, n) = \left(\mu s\left[(s)_0 = g(\bar{m}) \wedge \forall x < n (s)_{x+1} = h(\bar{m}, x, h(\bar{m}, x))\right]\right)_n$$

由 $(x)_y, g$ 和 h 可表示，以及可表示在布尔运算、函数复合、正则极小算子下封闭（正则性质易证），f 也是 Q_E 可表示的

因此，只需要证明、乘方运算在 Q 中可表示，变可得 Q 中可表示在原始递归下封闭。

但乘方运算本身是通过原始递归得到的

原始递归可表示

那么可以定义

$$f(\bar{m}, n) = (\mu s\big[(s)_0 = g(\bar{m}) \wedge \forall x < n(s)_{x+1} = h(\bar{m}, x, h(\bar{m}, x))\big])_n$$

由 $(x)_y, g$ 和 h 可表示，以及可表示在布尔运算、函数复合、正则极小算子下封闭（正则性质易证），f 也是 Q_E 可表示的

因此，只需要证明、乘方运算在 Q 中可表示，变可得 Q 中可表示在原始递归下封闭。

但乘方运算本身是通过原始递归得到的

原始递归可表示

那么可以定义

$f(\bar{m}, n) = (\mu s[(s)_0 = g(\bar{m}) \wedge \forall x < n(s)_{x+1} = h(\bar{m}, x, h(\bar{m}, x))])_n$

由 $(x)_y, g$ 和 h 可表示，以及可表示在布尔运算、函数复合、正则极小算子下封闭（正则性质易证），f 也是 Q_E 可表示的

因此，只需要证明、乘方运算在 Q 中可表示，变可得 Q 中可表示在原始递归下封闭。

但乘方运算本身是通过原始递归得到的

用加法和乘法编码有穷序列

我们需要定义一个 Q 中可表示的函数 $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对任意有穷序列 $(a_0, \ldots, a_n)$，存在自然数 a，使得 $\beta(a, i) = a_i$（$i \leq n$）

用加法和乘法编码

定理 (裴蜀定理，Bézout's identity)

令 a, b 是互素的整数，则存在整数 u、 v，使得 $ua + vb = 1$

Proof.

- 等价：令 a, b 是非零整数，d 是它们的最大公约数，则存在整数 u, v 使得 $ua + vb = d$
- 加强版欧几里得辗转相除法（Extended Euclidean algorithm）

用加法和乘法编码

定理 (中国剩余定理)

给定一组两两互素的除数 $d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{N}^+$ ，余数 $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ 满足 $a_i < d_i$ （$0 \leq i \leq n$）的自然数，则下述一元线性同余方程组有解：

$$x \equiv_{d_0} a_0$$

$$x \equiv_{d_1} a_1$$

$$\vdots$$

$$x \equiv_{d_n} a_n$$

存在所需互素除数

引理

任给自然数 $s \in \mathbb{N}$，下述 $s+1$ 个自然数两两互素：

$1+1\cdot s!$、$1+2\cdot s!$、……、$1+(s+1)\cdot s!$

Proof.

反设 $1+(i+1)\cdot s!$ 与 $1+(j+1)\cdot s!$ 有 >1 的公约数 d

用加法和乘法编码

引理

定义函数 $\alpha : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ 为 $\alpha(c, d, i) = \mathrm{rem}(c, 1 + (i + 1)d)$。则 α 是可表示的

Proof.

$\alpha(c, d, i) = \mu r\, [\exists q \leq c(c = q(1 + (i + 1)d) + r)]$

用加法和乘法编码

引理

定义函数 $\alpha : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ 为 $\alpha(c, d, i) = \mathrm{rem}(c, 1 + (i + 1)d)$。则 α 是可表示的

Proof.

$$\alpha(c, d, i) = \mu r\ [\exists q \leq c(c = q(1 + (i + 1)d) + r)]$$

原始递归可表示

编码有序对

引理

下列函数可表示：

$$J(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)(a+b+1)+a$$

$$K(p) = \mu a \leq p\ \exists b \leq p\ J(a,b) = p$$

$$L(p) = \mu b \leq p\ \exists a \leq p\ J(a,b) = p$$

原始递归可表示

引理

定义哥德尔 β 函数为 $\beta(s,i) = \alpha(K(s), L(s), i)$，则 $\beta(s,i)$ 在 Q 中是可表示的，且对任何自然数 $n, a_0, \ldots, a_n$ 都存在自然数 s，使得对任意 $i \leq n$，都有 $\beta(s,i) = a_i$

注意：$\beta(s,i)$ 可以被看作为一种有穷序列解码函数，类似 $(x)_y$

原始递归可表示

引理

定义哥德尔 β 函数为 $\beta(s,i)=\alpha(K(s),L(s),i)$，则 $\beta(s,i)$ 在 Q 中是可表示的，且对任何自然数 $n,a_0,\ldots,a_n$ 都存在自然数 s，使得对任意 $i\leq n$，都有 $\beta(s,i)=a_i$

注意：$\beta(s,i)$ 可以被看作为一种有穷序列解码函数，类似 $(x)_y$

原始递归可表示

定理

Q 中可表示性在原始递归下封闭

Proof.

令 g, h 是可表示的，f 是由 g, h 通过原始递归得到的。令

$$
\begin{aligned}
&F(\bar{m}, n) \\
&= \mu s\Big[\beta(s,0) = g(\bar{m}) \wedge \forall i < n\big(\beta(s,i+1) = h(\bar{m}, i, \beta(s,i))\big)\Big]
\end{aligned}
$$

则 F 是可表示的，且 $f(\bar{m}, n) = \beta(F(m,n), n)$。因而 f 也是可表示的

原始递归可表示

定理

Q 中可表示性在原始递归下封闭

Proof.

令 g, h 是可表示的，f 是由 g, h 通过原始递归得到的。令

$$
\begin{aligned}
&F(\bar{m}, n) \\
&\quad = \mu s\Big[\beta(s,0) = g(\bar{m}) \wedge \forall i < n\big(\beta(s,i+1) = h(\bar{m}, i, \beta(s,i))\big)\Big]
\end{aligned}
$$

则 F 是可表示的，且 $f(\bar{m}, n) = \beta(F(m,n), n)$。因而 f 也是可表示的

定理

令 T 是 Q 的递归可枚举且一致的扩张，则

- 对任意函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$，$f$ 是递归的当且仅当 f 是 T 中可表示的
- 对任意关系 $R \subseteq \mathbb{N}^k$，R 是递归的当且仅当 R 是 T 中可表示的

习题：

无