# 数理逻辑 II

# Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

# 前情提要

# 前情提要

罗宾逊算术$Q$：

Q1 $\forall x Sx \neq 0$

Q2 $\forall x \forall y (Sx = Sy \rightarrow x = y)$

Q3 $\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y x = Sy)$

Q4 $\forall x (x + 0 = x)$

Q5 $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$

Q6 $\forall x (x \cdot 0 = 0)$

Q7 $\forall x \forall y (x \cdot Sy = x \cdot y + x)$

# 前情提要

罗宾逊算术$Q$：

- $Q \nvdash \forall x Sx \neq x$
- 对每个自然数 $n$，$Q \vdash S\mathrm{n} \neq \mathrm{n}$，其中 $\mathrm{n} = S^n 0$

# 前情提要

罗宾逊算术$Q$：

- $Q \nvdash \forall x Sx \neq x$
- 对每个自然数 $n$，$Q \vdash S\mathrm{n} \neq \mathrm{n}$，其中 $\mathrm{n} = S^n 0$

# 前情提要

罗宾逊算术$Q$：

- $Q \vdash \forall x(Sx + \mathrm{n} = x + S\mathrm{n})$
- $Q \vdash \mathrm{m} + \mathrm{n} = S^{m+n}0$ 且 $Q \vdash \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} = S^{m \cdot n}0$
- 如果 $n \neq m$ 则 $Q \vdash \mathrm{n} \neq \mathrm{m}$
- 如果 $m \leq n$ ，则 $Q \vdash \mathrm{m} \leq \mathrm{n}$
- 如果 $m \nleq n$，则 $Q \vdash \mathrm{m} \nleq \mathrm{n}$
- $Q \vdash \forall x(x \leq \mathrm{n} \leftrightarrow x = \mathrm{0} \vee \ldots \vee x = \mathrm{n})$
- $Q \vdash \forall x(x \leq \mathrm{n} \vee \mathrm{n} \leq x)$

# 前情提要

可表示性：

$P \subseteq \mathbb{N}^k$ 在 $T$ 中可表示，当且仅当存在一个 $\mathcal{L}_{\text{ar}}$ 公式 $\rho(x_1, \ldots, x_k)$ 使得对任意 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ 有

$$(n_1, \ldots, n_k) \in P \Rightarrow T \vdash \rho(\mathsf{n}_1, \ldots, \mathsf{n}_k)\text{，且}$$

$$(n_1, \ldots, n_k) \notin P \Rightarrow T \vdash \neg\rho(\mathsf{n}_1, \ldots, \mathsf{n}_k)$$

# 前情提要

可表示性：

- 可表示性在布尔运算下封闭
- 可表示的关系都是递归关系

# 前情提要

函数可表示性：

$$T \vdash \forall y \left[ \varphi(\mathsf{n}_1, \ldots, \mathsf{n}_k, y) \leftrightarrow y = S^{f(n_1, \ldots, n_k)} 0 \right]$$

$\varphi$ 函数地表示 $f \Rightarrow \varphi$ 表示 $f$（的图像）

# 更多可表示性

回忆：可表示性在布尔运算下封闭

**命题**

可表示性在添加有界量词下封闭。即若 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 被 $\rho(\bar{x}, y)$ 表示，那么关系 $\exists d < mP(\bar{n}, d)$ 与 $\forall d < mP(\bar{n}, d)$ 分别被 $\exists y < \mathrm{m} P(\bar{x}, y)$ 和 $\forall y < \mathrm{m} P(\bar{x}, y)$ 表示

Proof.

考虑 $Q \vdash \forall x(x \leq \mathrm{n} \leftrightarrow x = 0 \vee \ldots \vee x = \mathrm{n})$

# 更多可表示性

回忆：可表示性在布尔运算下封闭

## 命题

可表示性在添加有界量词下封闭。即若 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 被 $\rho(\bar{x}, y)$ 表示，那么关系 $\exists d < mP(\bar{n}, d)$ 与 $\forall d < mP(\bar{n}, d)$ 分别被 $\exists y < \mathrm{m} P(\bar{x}, y)$ 和 $\forall y < \mathrm{m} P(\bar{x}, y)$ 表示

## Proof.

考虑 $Q \vdash \forall x(x \leq \mathrm{n} \leftrightarrow x = \mathrm{0} \vee \ldots \vee x = \mathrm{n})$

# 更多函数可表示

## 定义

令 $t$ 是 $\mathcal{L}_{ar}$-闭项（closed term），递归定义 $t^{\mathfrak{N}}$ 如下：

- $0^{\mathfrak{N}} = 0$
- $(St)^{\mathfrak{N}} = S^{\mathfrak{N}}(t^{\mathfrak{N}})$
- $(t_1 + t_2)^{\mathfrak{N}} = t_1^{\mathfrak{N}} +^{\mathfrak{N}} t_2^{\mathfrak{N}}$
- $(t_1 \cdot t_2)^{\mathfrak{N}} = t_1^{\mathfrak{N}} \cdot^{\mathfrak{N}} t_2^{\mathfrak{N}}$

显然，若 $t$ 是闭项，则 $t^{\mathfrak{N}}$ 是自然数，且对任意 $n$，$\mathrm{n}^{\mathfrak{N}} = n$

## 更多函数可表示

### 引理

对任意项 $t(\bar{x})$，

$$Q \vdash t(\bar{\mathsf{n}}) = S^{t^{\mathfrak{N}}(\bar{\mathsf{n}})}0$$

Proof.

对项归纳

由 $Q \vdash \mathsf{m} + \mathsf{n} = S^{m+n}0$ 和 $Q \vdash \mathsf{m} \cdot \mathsf{n} = S^{m \cdot n}0$

# 更多函数可表示

## 引理

对任意项 $t(\bar{x})$，

$$Q \vdash t(\bar{\mathsf{n}}) = S^{t^{\mathfrak{N}}(\bar{\mathsf{n}})}0$$

*Proof.*

对项归纳

由 $Q \vdash \mathsf{m} + \mathsf{n} = S^{m+n}0$ 和 $Q \vdash \mathsf{m} \cdot \mathsf{n} = S^{m \cdot n}0$

# 更多函数可表示

## 引理

对任意项 $t(\bar{x})$，

$$Q \vdash t(\bar{n}) = S^{t^{\mathfrak{N}}(\bar{n})}0$$

## 引理

令 $t(\bar{x})$ 是 $\mathcal{L}_{ar}$ 项，定义函数 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{n})^{\mathfrak{N}}$。则 $f_t$ 是函数可表示的

Proof.

$Q \vdash \forall y \left[ t(\bar{n}) = y \leftrightarrow y = S^{f_t(\bar{n})}0 \right]$

# 更多函数可表示

**引理**

对任意项 $t(\bar{x})$，

$$Q \vdash t(\bar{\mathsf{n}}) = S^{t^{\mathfrak{N}}(\bar{\mathsf{n}})}0$$

**引理**

令 $t(\bar{x})$ 是 $\mathcal{L}_{ar}$ 项，定义函数 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{\mathsf{n}})^{\mathfrak{N}}$。则 $f_t$ 是函数可表示的

*Proof.*

$$Q \vdash \forall y \left[ t(\bar{\mathsf{n}}) = y \leftrightarrow y = S^{f_t(\bar{n})}0 \right]$$

# 更多函数可表示

**引理**

对任意项 $t(\bar{x})$，

$$Q \vdash t(\bar{n}) = S^{t^{\mathfrak{N}}(\bar{n})}0$$

**引理**

令 $t(\bar{x})$ 是 $\mathcal{L}_{ar}$ 项，定义函数 $f_t(\bar{n}) = t(\bar{n})^{\mathfrak{N}}$。则 $f_t$ 是函数可表示的

Proof.

$$Q \vdash \forall y\Big[t(\bar{n}) = y \leftrightarrow y = S^{t^{\mathfrak{N}}(\bar{n})}0\Big]$$

# 更多函数可表示

**推论**

后继函数、常函数、投射函数、加法、乘法都是可表示的

Proof.

常函数：$\varphi_c(\bar{x}, y) =_{\mathrm{df}} y = c$

投射函数：$\varphi_{\pi_i^n}(x_1, \ldots, x_n, y) =_{\mathrm{df}} y = x_i$

# 更多函数可表示

## 推论

后继函数、常函数、投射函数、加法、乘法都是可表示的

Proof.

常函数：$\varphi_c(\bar{x}, y) =_{\text{df}} y = c$

投射函数：$\varphi_{\pi_i^n}(x_1, \ldots, x_n, y) =_{\text{df}} y = x_i$

# 更多函数可表示

## 定理

函数可表示在函数复合下封闭。若 $g : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$、$h_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$（$1 \leq i \leq r$）是函数可表示的，那么 $\mathrm{Cpo}(g, h_1, \ldots, h_r)$ 也是函数可表示

Proof.

假设 $\psi(y_1, \ldots, y_r, z)$、$\theta_i(x_1, \ldots, x_n, y_i)$（$1 \leq i \leq r$）分别表示 $g, h_1, \ldots, h_r$，定义 $\varphi(x_1, \ldots, x_n, z)$ 为

$$\forall y_1 \ldots \forall y_r \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{r} \theta_i(x_1, \ldots, x_n, y_i)\Big) \to \psi(y_1, \ldots, y_r, z)\Big]$$

# 更多函数可表示

**定理**

函数可表示在函数复合下封闭。若 $g : \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$、$h_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$（$1 \le i \le r$）是函数可表示的，那么 $\mathrm{Cpo}(g, h_1, \ldots, h_r)$ 也是函数可表示

*Proof.*

假设 $\psi(y_1, \ldots, y_r, z)$、$\theta_i(x_1, \ldots, x_n, y_i)$（$1 \le i \le r$）分别表示 $g, h_1, \ldots, h_r$，定义 $\varphi(x_1, \ldots, x_n, z)$ 为

$$\forall y_1 \ldots \forall y_r \Big[ \big( \bigwedge_{i=1}^{r} \theta_i(x_1, \ldots, x_n, y_i) \big) \to \psi(y_1, \ldots, y_r, z) \Big]$$

# 更多函数可表示

## 定理

假设 $\alpha(\bar{x}, y)$ 表示关系 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$，且对任意 $\bar{n} \in \mathbb{N}$ 都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P(\bar{n}, m)$。定义 $f(\bar{n}) = \mu m P(\bar{n}, m)$。则 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 函数可表示。

*Proof.*

令 $\varphi(\bar{x}, y)$ 为 $\alpha(\bar{x}, y) \wedge (\forall z < y) \neg \alpha(\bar{x}, z)$

# 更多函数可表示

**定理**

假设 $\alpha(\bar{x}, y)$ 表示关系 $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$，且对任意 $\bar{n} \in \mathbb{N}$ 都存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P(\bar{n}, m)$。定义 $f(\bar{n}) = \mu m P(\bar{n}, m)$。则 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 函数可表示。

*Proof.*

令 $\varphi(\bar{x}, y)$ 为 $\alpha(\bar{x}, y) \wedge (\forall z < y) \neg \alpha(\bar{x}, z)$

# 更多函数可表示

**推论**

如果一个 全 函数 $f$（的图像）作为关系是可表示的，则 $f$ 作为函数也是可表示的。

习题： 无

下次习题课

之前的习题：

7.3、7.4、7.5 全部

9.1.1、9.1.2

习题： 无

下次习题课

之前的习题：

7.3、7.4、7.5 全部

9.1.1、9.1.2