数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

部分递归函数与图灵机：

- 部分递归函数：初始函数或由此通过函数复合、原始递归、极小算子生成的函数
- 图灵可计算函数：由一个图灵机刻画的函数
- 部分递归函数 $=$ 图灵可计算函数

前情提要

部分递归函数与图灵机：

- 部分递归函数：初始函数或由此通过函数复合、原始递归、极小算子生成的函数
- 图灵可计算函数：由一个图灵机刻画的函数
- 部分递归函数 = 图灵可计算函数

前情提要

部分递归函数与图灵机：

- 部分递归函数：初始函数或由此通过函数复合、原始递归、极小算子生成的函数
- 图灵可计算函数：由一个图灵机刻画的函数
- 部分递归函数 $=$ 图灵可计算函数

一阶算术语言：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ar}} = \{0, S, +, \cdot\}$$

算术结构：

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$$

完全算术理论：

$$\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} = \{\sigma \in \mathcal{L}_{\mathrm{ar}} \mid \mathfrak{N} \vDash \sigma\}$$

算术理论的公理化？

一阶算术语言：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ar}} = \{0, S, +, \cdot\}$$

算术结构：

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$$

完全算术理论：

$$\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} = \{\sigma \in \mathcal{L}_{\mathrm{ar}} \mid \mathfrak{N} \vDash \sigma\}$$

算术理论的公理化？

一阶算术语言：

$$\mathcal{L}_{\mathsf{ar}} = \{0, S, +, \cdot\}$$

算术结构：

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$$

完全算术理论：

$$\mathsf{Th}\,\mathfrak{N} = \{\sigma \in \mathcal{L}_{\mathsf{ar}} \mid \mathfrak{N} \vDash \sigma\}$$

算术理论的公理化？

一阶算术语言：

$$\mathcal{L}_{\mathsf{ar}} = \{0, S, +, \cdot\}$$

算术结构：

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}})$$

完全算术理论：

$$\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} = \{\sigma \in \mathcal{L}_{\mathsf{ar}} \mid \mathfrak{N} \vDash \sigma\}$$

算术理论的公理化？

罗宾逊算术

罗宾逊算术

定义 (罗宾逊算术，Robinson Arithmetic)

定义罗宾逊算术（ Q ）为下述 $\mathcal{L}_{ar}$ 句子集

- 刻画后继函数

Q1 $\forall x Sx \neq 0$

Q2 $\forall x \forall y (Sx = Sy \to x = y)$

Q3 $\forall x (x \neq 0 \to \exists y x = Sy)$

罗宾逊算术

定义 (罗宾逊算术，Robinson Arithmetic)

- 加法定义

  Q4 $\forall x(x + 0 = x)$

  Q5 $\forall x \forall y(x + Sy = S(x + y))$

- 定义乘法

  Q6 $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

  Q7 $\forall x \forall y(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$

罗宾逊算术

命题

$$\mathfrak{N} \models Q$$

因而，$\mathrm{Cn}(Q) \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$

那么，是否有 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cn}(Q)$？

罗宾逊算术

命题

$$\mathfrak{N} \models Q$$

因而，$\mathrm{Cn}(Q) \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$

那么，是否有 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cn}(Q)$？

命题

$$\mathfrak{N} \models Q$$

因而，$\mathrm{Cn}(Q) \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$

那么，是否有 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{Cn}(Q)$？

罗宾逊算术

例

令 $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, 0, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}})$，其中 $S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}$ 分别是 $S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ 的扩张：

1. $S(\infty) = \infty$
2. $n + \infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$（对所有的 $n \in \mathbb{N}$）
3. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ 并且 $n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty \cdot \infty = \infty$（对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \neq 0$）

则，$\mathfrak{M} \models Q$

罗宾逊算术

例

令 $\mathfrak{M} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, 0, S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}})$，其中 $S^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}$ 分别是 $S^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}$ 的扩张：

1. $S(\infty) = \infty$
2. $n + \infty = \infty + n = \infty + \infty = \infty$（对所有的 $n \in \mathbb{N}$）
3. $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$ 并且 $n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty \cdot \infty = \infty$ （对所有的 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \neq 0$）

则，$\mathfrak{M} \vDash Q$

罗宾逊算术

引理

1. $Q \nvdash \forall x Sx \neq x$
2. 对每个自然数 n，$Q \vdash S\mathrm{n} \neq \mathrm{n}$，其中 $\mathrm{n} = S^n 0$

Proof.

1. 考虑 $\mathfrak{M}$
2. 对自然数 $n \in \mathbb{N}$ 归纳

引理

1. $Q \nvdash \forall x Sx \neq x$
2. 对每个自然数 n，$Q \vdash S\mathrm{n} \neq \mathrm{n}$，其中 $\mathrm{n} = S^n 0$

Proof.

1. 考虑 $\mathfrak{M}$
2. 对自然数 $n \in \mathbb{N}$ 归纳

罗宾逊算术

引理

1. $Q \nvdash \forall x Sx \neq x$
2. 对每个自然数 n，$Q \vdash S\mathrm{n} \neq \mathrm{n}$，其中 $\mathrm{n} = S^n 0$

Proof.

1. 考虑 $\mathfrak{M}$
2. 对自然数 $n \in \mathbb{N}$ 归纳

罗宾逊算术

引理

1. $Q \nvdash \forall x Sx \neq x$
2. 对每个自然数 n，$Q \vdash S\mathrm{n} \neq \mathrm{n}$，其中 $\mathrm{n} = S^n 0$

Proof.

1. 考虑 $\mathfrak{M}$
2. 对自然数 $n \in \mathbb{N}$ 归纳

罗宾逊算术

引理

对任意 $n, m \in \mathbb{N}$，有

1. $Q \vdash \forall x(Sx + \mathsf{n} = x + S\mathsf{n})$
2. $Q \vdash \mathsf{m} + \mathsf{n} = S^{m+n}0$ 且 $Q \vdash \mathsf{m} \cdot \mathsf{n} = S^{m \cdot n}0$
3. 如果 $n \neq m$ 则 $Q \vdash \mathsf{n} \neq \mathsf{m}$

罗宾逊算术

引理

4. 如果 $m \leq n$ (*) ，则 $Q \vdash \mathrm{m} \leq \mathrm{n}$
5. 如果 $m \nleq n$，则 $Q \vdash \mathrm{m} \nleq \mathrm{n}$
6. $Q \vdash \forall x(x \leq \mathrm{n} \leftrightarrow x = 0 \vee \ldots \vee x = \mathrm{n})$
7. $Q \vdash \forall x(x \leq \mathrm{n} \vee \mathrm{n} \leq x)$

(*) $x \leq y =_{\mathrm{df}} \exists z(x + z = y)$

命题

假设 $\mathfrak{M} \vDash Q$ 则，

- 函数 $f(n) = \mathrm{n}^{\mathfrak{M}}$ 是一个嵌入，因此不妨假设 $\mathbb{N} \subseteq M$
- $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的尾节扩张（end extension），即若 $a \in M$ 且存在 $n \in \mathbb{N}$ 有 $a \leq^{\mathfrak{M}} n$，则 $a \in \mathbb{N}$。

命题

假设 $\mathfrak{M} \vDash Q$ 则，

- 函数 $f(n) = \mathrm{n}^{\mathfrak{M}}$ 是一个嵌入，因此不妨假设 $\mathbb{N} \subseteq M$
- $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{N}$ 的尾节扩张（end extension），即若 $a \in M$ 且存在 $n \in \mathbb{N}$ 有 $a \leq^{\mathfrak{M}} n$，则 $a \in \mathbb{N}$。

可表示性

可表示性

定义 (可表示性)

给定理论 $T \supseteq Q$，$P \subseteq \mathbb{N}^k$，我们称 P 在 T 中数码逐点可表示（numeralwise representable，简称可表示），当且仅当存在一个 $\mathcal{L}_{ar}$ 公式 $\rho(x_1, \ldots, x_k)$ 使得对任意 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ 有

$$(n_1, \ldots, n_k) \in P \Rightarrow T \vdash \rho(\mathsf{n}_1, \ldots, \mathsf{n}_k)，且$$

$$(n_1, \ldots, n_k) \notin P \Rightarrow T \vdash \neg\rho(\mathsf{n}_1, \ldots, \mathsf{n}_k)$$

此时，我们又称 ρ 在 T 中表示 P

定义 (可表示性)

给定理论 $T \supseteq Q$，$P \subseteq \mathbb{N}^k$，我们称 P 在 T 中数码逐点可表示（numeralwise representable，简称可表示），当且仅当存在一个 $\mathcal{L}_{\mathrm{ar}}$ 公式 $\rho(x_1, \ldots, x_k)$ 使得对任意 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ 有

$$(n_1, \ldots, n_k) \in P \Rightarrow T \vdash \rho(\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_k)\text{，且}$$

$$(n_1, \ldots, n_k) \notin P \Rightarrow T \vdash \neg\rho(\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_k)$$

此时，我们又称 ρ 在 T 中表示 P

可表示性

回忆：

$R \subseteq \mathbb{N}^k$ 是 $\mathfrak{N}$ 中**可定义的**，当且仅当存在一个公式 $\rho(\bar{x})$，对任意 $\bar{n} \in \mathbb{N}^k$ 有

$$\bar{n} \in R \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho[\bar{n}] \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho(\bar{\mathrm{n}})$$

命题

- ρ 在 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 中表示 R，当且仅当 ρ 在 $\mathfrak{N}$ 中定义 R
- 令 $T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$。若 R 在 T 中可表示，则 R 在 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 中可表示

可表示性

回忆：

$R \subseteq \mathbb{N}^k$ 是 $\mathfrak{N}$ 中**可定义的**，当且仅当存在一个公式 $\rho(\bar{x})$，对任意 $\bar{n} \in \mathbb{N}^k$ 有

$$\bar{n} \in R \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho[\bar{n}] \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho(\bar{\mathrm{n}})$$

命题

- ρ 在 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 中表示 R，当且仅当 ρ 在 $\mathfrak{N}$ 中定义 R
- 令 $\underline{T}$a PĐ €Wœ oQ Uð - M

可表示性

回忆：

$R \subseteq \mathbb{N}^k$ 是 $\mathfrak{N}$ 中可定义的，当且仅当存在一个公式 $\rho(\bar{x})$，对任意 $\bar{n} \in \mathbb{N}^k$ 有

$$\bar{n} \in R \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho[\bar{n}] \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \rho(\bar{\mathrm{n}})$$

命题

- ρ 在 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 中表示 R，当且仅当 ρ 在 $\mathfrak{N}$ 中定义 R
- 令 $T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$。若 R 在 T 中可表示，则 R 在 $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ 中可表示

可表示性

例

- $\{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 Q 中可表示
- $\leq$ 关系在 Q 中可表示

命题

可表示性在布尔运算下封闭。即假设 P, Q 在 T 中可表示，那么 $P \cup Q$

可表示性

例

- $\{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 在 Q 中可表示
- $\leq$ 关系在 Q 中可表示

命题

可表示性在布尔运算下封闭。即假设 P, Q 在 T 中可表示，那么 $P \cup Q$

可表示性

命题

如果 R 在 Q 中可表示，那么 R 是一个递归关系

可表示性

定义 (函数可表示)

我们称 $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 在 T 中 函数可表示，当且仅当存在一个公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y)$，使得对任意 $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ 有

$$T \vdash \forall y\big[\varphi(\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_k, y) \leftrightarrow y = S^{f(n_1, \ldots, n_k)}0\big]$$

此时，我们称 φ 在 T 中 函数地表示 (functionally represents) f

可表示性

命题

如果 $\varphi(\bar{x}, y)$ 在 T 中函数地表示 f，那么 φ 也在 T 中表示 f（的图像）

例

考虑常函数 $C_0(x) = 0$，它的图像是 $\{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$。则公式

$$\varphi(x, y) = y + y = y$$

在 Q 中表示 C_0（的图像），但 $Q \nvdash \forall y(y + y = y \rightarrow y = 0)$

可表示性

命题

如果 $\varphi(\bar{x}, y)$ 在 T 中函数地表示 f，那么 φ 也在 T 中表示 f（的图像）

例

考虑常函数 $C_0(x) = 0$，它的图像是 $\{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$。则公式

$$\varphi(x, y) = y + y = y$$

在 Q 中表示 C_0（的图像），但 $Q \nvdash \forall y(y + y = y \to y = 0)$

习题：

9.1.1、9.1.2