数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

部分递归函数都是图灵可计算的：

- 初始函数都是图灵可计算的
- 双向无穷纸带图灵机可计算的，用单向纸带的图灵机也可以计算
- 图灵可计算在函数符合、原始递归、极小算子下封闭

前情提要

部分递归函数都是图灵可计算的：

- 初始函数都是图灵可计算的
- 双向无穷纸带图灵机可计算的，用单向纸带的图灵机也可以计算
- 图灵可计算在函数符合、原始递归、极小算子下封闭

前情提要

部分递归函数都是图灵可计算的：

- 初始函数都是图灵可计算的
- 双向无穷纸带图灵机可计算的，用单向纸带的图灵机也可以计算
- 图灵可计算在函数符合、原始递归、极小算子下封闭

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

证明思路：编码图灵机及其计算过程。设计部分递归函数，以图灵机及其输入为输入，输出计算及其结果。

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 字母：0,1 ，见习题 7.3.3
- $\ulcorner L \urcorner = 2, \ulcorner R \urcorner = 3$
- 状态：$\ulcorner q_s \urcorner = 4, \ulcorner q_h \urcorner = 5, \ulcorner q_i \urcorner = i + 6$ $(i \in \mathbb{N})$

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 字母：0,1 ，见习题 7.3.3
- $\ulcorner L \urcorner = 2, \ulcorner R \urcorner = 3$
- 状态：$\ulcorner q_s \urcorner = 4, \ulcorner q_h \urcorner = 5, \ulcorner q_i \urcorner = i + 6 \ (i \in \mathbb{N})$

图灵可计算 ⇒ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 字母：0,1 ，见习题 7.3.3
- $\ulcorner L \urcorner = 2, \ulcorner R \urcorner = 3$
- 状态：$\ulcorner q_s \urcorner = 4, \ulcorner q_h \urcorner = 5, \ulcorner q_i \urcorner = i + 6 \ (i \in \mathbb{N})$

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 字母：0,1 ，见习题 7.3.3
- $\ulcorner L \urcorner = 2, \ulcorner R \urcorner = 3$
- 状态：$\ulcorner q_s \urcorner = 4, \ulcorner q_h \urcorner = 5, \ulcorner q_i \urcorner = i + 6 \ (i \in \mathbb{N})$

图灵可计算 ⇒ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 指令：$\ulcorner qaa'q' \urcorner = \langle \ulcorner q \urcorner, \ulcorner a \urcorner, \ulcorner a' \urcorner, \ulcorner q' \urcorner \rangle$
- 指令集：$\ulcorner \delta \urcorner = \langle \ulcorner s_i \urcorner \rangle_{s_i \in \delta}$

引理

“e 编码了一个指令集”是原始递归谓词

图灵可计算 ⇒ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 指令：$\ulcorner qaa'q' \urcorner = \langle \ulcorner q \urcorner, \ulcorner a \urcorner, \ulcorner a' \urcorner, \ulcorner q' \urcorner \rangle$
- 指令集：$\ulcorner \delta \urcorner = \langle \ulcorner s_i \urcorner \rangle_{s_i \in \delta}$

引理

“e 编码了一个指令集”是原始递归谓词

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码图灵机及其计算过程

- 指令：$\ulcorner qaa'q' \urcorner = \langle \ulcorner q \urcorner, \ulcorner a \urcorner, \ulcorner a' \urcorner, \ulcorner q' \urcorner \rangle$
- 指令集：$\ulcorner \delta \urcorner = \langle \ulcorner s_i \urcorner \rangle_{s_i \in \delta}$

引理

“e 编码了一个指令集”是原始递归谓词

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码一个格局

令格局 $C = uqav$，其中 $u = (b_0, \ldots, b_n)$、 $v = (c_0, \ldots, c_m)$，定义

$$\ulcorner C \urcorner = \langle d(u), \ulcorner q \urcorner, \ulcorner a \urcorner, d(v) \rangle$$

其中 $d(u) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot 2^i$，$d(v) = \sum_{j=0}^{m} c_j \cdot 2^j$

引理

“c 编码了一个格局”是原始递归的

图灵可计算 ⇒ 部分递归

编码一个计算

- $IN(x) = \ulcorner C_0 \urcorner$，其中 C_0 是输入 $(x_0, \ldots, x_{lh(x)-1})$ 的初始格局
- $NEXT(e, c) = d$ 当且仅当 c、d 分别编码了格局 C 和 D，且 D 是由 C 经过 e 所编码的图灵机（指令集）一步计算得到的。
- $TERM(e, c)$ 表示 c 编码了 e 编码的图灵机（指令集）的一个终止格局
- $OUT(c) = y$，当且仅当 y 是 c 编码格局的输出值

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码一个计算

- $IN(x) = \ulcorner C_0 \urcorner$，其中 C_0 是输入 $(x_0, \ldots, x_{lh(x)-1})$ 的初始格局
- $NEXT(e, c) = d$ 当且仅当 c、d 分别编码了格局 C 和 D，且 D 是由 C 经过 e 所编码的图灵机（指令集）一步计算得到的。
- $TERM(e, c)$ 表示 c 编码了 e 编码的图灵机（指令集）的一个终止格局
- $OUT(c) = y$，当且仅当 y 是 c 编码格局的输出值

图灵可计算 ⇒ 部分递归

编码一个计算

- $IN(x) = \ulcorner C_0 \urcorner$，其中 C_0 是输入 $(x_0, \ldots, x_{lh(x)-1})$ 的初始格局
- $NEXT(e, c) = d$ 当且仅当 c、d 分别编码了格局 C 和 D，且 D 是由 C 经过 e 所编码的图灵机（指令集）一步计算得到的。
- $TERM(e, c)$ 表示 c 编码了 e 编码的图灵机（指令集）的一个终止格局
- $OUT(c) = y$，当且仅当 y 是 c 编码格局的输出值

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码一个计算

- $IN(x) = \ulcorner C_0 \urcorner$，其中 C_0 是输入 $(x_0, \ldots, x_{lh(x)-1})$ 的初始格局
- $NEXT(e, c) = d$ 当且仅当 c、d 分别编码了格局 C 和 D，且 D 是由 C 经过 e 所编码的图灵机（指令集）一步计算得到的。
- $TERM(e, c)$ 表示 c 编码了 e 编码的图灵机（指令集）的一个终止格局
- $OUT(c) = y$，当且仅当 y 是 c 编码格局的输出值

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

编码一个计算

定义 (Kleene 谓词)

Kleene 谓词 $T \subseteq \mathbb{N}^3$ 被定义为：$(e, x, z) \in T$，当且仅当 x 是一个哥德尔数，e 编码了一个图灵机（指令集），z 编码了一个以 x 为输入的一个 e 编码的图灵机的计算。

引理

Kleene 谓词是原始递归的

图灵可计算 ⇒ 部分递归

定理

每个图灵可计算的函数都是部分递归的

Proof.

假设 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 是被 e 编码的图灵机计算的函数，x 编码 $\bar{x}$。令

$$g(x) = \mu z T(e, x, z)$$

则 $f(\bar{x}) = OUT(g(x)_{lh(g(x))-1})$

图灵可计算 $\Rightarrow$ 部分递归

定理

每个图灵可计算的函数都是部分递归的

Proof.

假设 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 是被 e 编码的图灵机计算的函数，x 编码 $\bar{x}$。令

$$g(x) = \mu z T(e, x, z)$$

则 $f(\bar{x}) = OUT(g(x)_{lh(g(x))-1})$

丘奇论题

一个函数是能行可计算的，当且仅当它被一个图灵机计算，当且仅当它是一个部分递归函数

Kleene 正规型定理

存在一个原始递归函数 $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和一个原始递归谓词 $T \subseteq \mathbb{N}^3$，使得对任意部分递归函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 都存在一个自然数 e，使得

$$f(x) = U\big(\mu z T(e, x, z)\big)$$

Proof.

令 T 为 Kleene 谓词，且

$$U(x) = OUT\big((x)_{\mathrm{lh}(x)-1}\big)$$

Kleene 正规型定理

推论

一个函数是递归的当且仅当它是全的原始递归函数

Proof.

(⇒) 归纳证明递归函数都是全函数

(⇐) 定义 T_e，使得 $T_e(x,z)$ 当且仅当 $T(e,x,z)$。则

$$f(x) = U(\mu z T_e(x,z))$$

证明 (μz) 的正则性

Kleene 正规型定理

推论

一个函数是递归的当且仅当它是全的原始递归函数

Proof.

($\Rightarrow$) 归纳证明递归函数都是全函数

($\Leftarrow$) 定义 T_e ，使得 $T_e(x,z)$ 当且仅当 $T(e,x,z)$。则

$$f(x)=U(\mu z T_e(x,z))$$

证明 (μz) 的正则性

Kleene 正规型定理

推论

一个函数是递归的当且仅当它是全的原始递归函数

Proof.

($\Rightarrow$) 归纳证明递归函数都是全函数

($\Leftarrow$) 定义 T_e，使得 $T_e(x,z)$ 当且仅当 $T(e,x,z)$。则

$$f(x) = U(\mu z T_e(x,z))$$

证明 (μz) 的正则性

Kleene 正规型定理

推论

一个函数是递归的当且仅当它是全的原始递归函数

Proof.

($\Rightarrow$) 归纳证明递归函数都是全函数

($\Leftarrow$) 定义 T_e，使得 $T_e(x, z)$ 当且仅当 $T(e, x, z)$。则

$$f(x) = U(\mu z T_e(x, z))$$

证明 (μz) 的正则性

Kleene 正规型定理

推论 (通用递归函数)

存在部分递归函数 $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对任意递归函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 存在一个自然数 e，使得对任意 x 有

$$f(x) = \Phi(e, x)$$

Proof.

令 $\Phi(e, x) = U(\mu z T(e, x, z))$

Kleene 正规型定理

推论 (通用递归函数)

存在部分递归函数 $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$，使得对任意递归函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 存在一个自然数 e，使得对任意 x 有

$$f(x) = \Phi(e, x)$$

Proof.

令 $\Phi(e, x) = U(\mu z T(e, x, z))$

Kleene 正规型定理

我们可以“能行地”枚举所有部分递归函数：

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_e, \ldots$$

其中，$\varphi_e(x) = \Phi(e, x)$

命题

不存在“通用递归函数”，也无法能行地枚举递归函数

Kleene 正规型定理

我们可以“能行地”枚举所有部分递归函数：

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_e, \ldots$$

其中，$\varphi_e(x) = \Phi(e, x)$

命题

不存在“通用递归函数”，也无法能行地枚举递归函数

递归可枚举集

定义 (递归可枚举集，recursively enumerable)

我们称集合 A 是递归可枚举的，当且仅当 $A = \emptyset$ 或 A 是某个递归（全）函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的值域，即

$$A = \left\{ y \,\middle|\, \exists x f(x) = y \right\}$$

递归关系 $R \subseteq \mathbb{N}^n$ 的定义类似

递归可枚举集

引理

下述命题两两等价

1. $A = \emptyset$ 或 A 是某个部分递归函数的值域
2. A 是递归可枚举集
3. $A = \emptyset$ 或 A 是某个原始递归函数的值域
4. A 的部分特征函数 χ_A^P 是部分递归函数
5. A 是某个部分递归函数的定义域
6. 存在递归关系 R 使得 $A = \left\{x \,\middle|\, \exists y R(x, y)\right\}$

递归可枚举集

定义

定义集合 A 的 部分特征函数 χ_A^P 如下：

$$\chi_A^P(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } x \in A \\ \uparrow & \text{否则} \end{cases}$$

递归可枚举集

命题

- 一个集合 A 是递归的，当且仅当它和它的补集都是递归可枚举的
- 若 A、B 都是 $k+1$ 元递归可枚举关系，那么
  - $A \cap B$、$A \cup B$ 也是递归可枚举的
  - $C = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists y (\bar{x}, y) \in A \right.$ 也是递归可枚举的

Proof.

练习

递归可枚举集

命题

- 一个集合 A 是递归的，当且仅当它和它的补集都是递归可枚举的
- 若 A、B 都是 $k+1$ 元递归可枚举关系，那么
  - $A \cap B$、$A \cup B$ 也是递归可枚举的
  - $C = \left\{\bar{x} \in \mathbb{N}^k \mid \exists y(\bar{x}, y) \in A\right.$ 也是递归可枚举的

Proof.

练习

递归可枚举集

递归可枚举而非递归的集合

例

集合 $K = \left\{ e \,\middle|\, \varphi_e(e) \downarrow \right\}$ 是递归的可枚举的，但不是递归的

推论

递归可枚举集不在取补下封闭

递归可枚举集

递归可枚举而非递归的集合

例

集合 $K = \left\{ e \,\middle|\, \varphi_e(e)\downarrow \right\}$ 是递归的可枚举的，但不是递归的

推论

递归可枚举集不在取补下封闭

习题：

7.4、7.5