数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

图灵机：

- 图灵机是一个四元组：$(A, \{L, R\}, Q, \delta)$
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$
- 确定的图灵机与非确定的图灵机
- 图灵可计算函数
- 有向转移图

前情提要

图灵机：

- 图灵机是一个四元组：$(A, \{L, R\}, Q, \delta)$
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$
- 确定的图灵机与非确定的图灵机
- 图灵可计算函数
- 有向转移图

前情提要

图灵机：

- 图灵机是一个四元组：$(A, \{L, R\}, Q, \delta)$
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$
- 确定的图灵机与非确定的图灵机
- 图灵可计算函数
- 有向转移图

前情提要

图灵机：

- 图灵机是一个四元组：$(A, \{L, R\}, Q, \delta)$
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$
- 确定的图灵机与非确定的图灵机
- 图灵可计算函数
- 有向转移图

前情提要

图灵机：

- 图灵机是一个四元组：$(A, \{L, R\}, Q, \delta)$
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$
- 确定的图灵机与非确定的图灵机
- 图灵可计算函数
- 有向转移图

定理

一个函数是图灵可计算的当且仅当它是部分递归的

部分递归 $\Rightarrow$ 图灵可计算

引理

初始函数都是图灵可计算的

Proof.

- 零函数：存在图灵机 M，使得存在一个输入 $\langle\rangle$（以 $\langle\rangle q_s 0 \langle\rangle$ 为初始格局）输出 0 的 M 计算
- 后继函数
- 投影函数

部分递归 $\Rightarrow$ 图灵可计算

引理

初始函数都是图灵可计算的

Proof.

- 零函数：存在图灵机 M，使得存在一个输入 $\langle\rangle$（以 $\langle\rangle q_s 0\langle\rangle$ 为初始格局）输出 0 的 M 计算
- 后继函数
- 投影函数

部分递归 ⇒ 图灵可计算

接下来只需要证明图灵可计算函数在函数复合、原始递归、极小算子下封闭

引理

每个图灵可计算的函数 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 都可以被一个“单向纸带的图灵机”计算。并且若 $f(\bar{x})\downarrow$，则存在一个从初始格局 $\$q_s1^{x_1+1}0\ldots01^{x_n+1}$ 到 $\$q_h1^{f(\bar{x})}$ 的计算

部分递归 ⇒ 图灵可计算

接下来只需要证明图灵可计算函数在函数复合、原始递归、极小算子下封闭

引理

每个图灵可计算的函数 $f:\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 都可以被一个“单向纸带的图灵机”计算。并且若 $f(\bar{x})\downarrow$，则存在一个从初始格局 $\$q_s 1^{x_1+1}0\ldots01^{x_n+1}$ 到 $\$q_h 1^{f(\bar{x})}$ 的计算

部分递归 ⇒ 图灵可计算

接下来只需要证明图灵可计算函数在函数复合、原始递归、极小算子下封闭

引理

每个图灵可计算的函数 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 都可以被一个“单向纸带的图灵机”计算。并且若 $f(\bar{x})\downarrow$，则存在一个从初始格局 $\$q_s 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1}$ 到 $\$q_h 1^{f(\bar{x})}$ 的计算

部分递归 ⇒ 图灵可计算

- 函数复合
- 原始递归
- 最小算子

部分递归 ⇒ 图灵可计算

- 函数复合
- 原始递归
- 最小算子

部分递归 $\Rightarrow$ 图灵可计算

- 函数复合
- 原始递归
- 最小算子

习题：

无