

数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

前情提要

前情提要

可计算函数不都是原始递归的：

- 对角线法
- 阿克曼函数
 - 阿克曼函数不是原始递归的

前情提要

可计算函数不都是原始递归的：

- 对角线法
- 阿克曼函数
 - 阿克曼函数不是原始递归的

前情提要

可计算函数不都是原始递归的：

- 对角线法
- 阿克曼函数
 - 阿克曼函数不是原始递归的

前情提要

递归函数

- 正则极小算子
- 递归函数：包涵初始函数并且在复合、原始递归和正则极小算子下封闭
 - 阿克曼函数是递归函数
 - 我们无法通过对角线法构造非递归的可计算性函数——正则性难以判断

前情提要

递归函数

- 正则极小算子
- 递归函数：包涵初始函数并且在复合、原始递归和正则极小算子下封闭
 - 阿克曼函数是递归函数
 - 我们无法通过对角线法构造非递归的可计算性函数——正则性难以判断

前情提要

递归函数

- 正则极小算子
- 递归函数：包涵初始函数并且在复合、原始递归和正则极小算子下封闭
 - 阿克曼函数是递归函数
 - 我们无法通过对角线法构造非递归的可计算性函数——正则性难以判断

前情提要

递归函数

- 正则极小算子
 - 递归函数：包涵初始函数并且在复合、原始递归和正则极小算子下封闭
 - 阿克曼函数是递归函数
 - 我们无法通过对角线法构造非递归的可计算性函数
- 正则性难以判断

前情提要

递归函数

- 正则极小算子
- 递归函数：包涵初始函数并且在复合、原始递归和正则极小算子下封闭
 - 阿克曼函数是递归函数
 - 我们无法通过对角线法构造非递归的可计算性函数——正则性难以判断

部分递归函数

我们用递归函数来刻画能行可计算的函数这个概念。但一个机械程序未必对应一个可计算的函数。

部分递归函数

定义 (μ 算子)

令 f 为一个部分函数。称函数 g 是从 f 由 μ -算子得到的，
如果

$$g(\mathbf{x}) = \mu y [\forall z \leq y (f(\mathbf{x}, z) \downarrow) \wedge f(\mathbf{x}, y) = 0].$$

为什么要加一个条件？

部分递归函数

定义 (μ 算子)

令 f 为一个部分函数。称函数 g 是从 f 由 μ -算子得到的，
如果

$$g(\mathbf{x}) = \mu y [\forall z \leq y (f(\mathbf{x}, z) \downarrow) \wedge f(\mathbf{x}, y) = 0].$$

为什么要加一个条件？

部分递归函数

定义

全体部分递归函数的集合为最小的包含所有初始函数，并且对复合、原始递归和极小化封闭的函数集合。

图灵机

定义 (图灵机, Turing Machine)

- 字母表 A 是一个有穷集合, 且至少 $0, 1 \in A$
- 方向 L, R
- 内部状态集 Q 也是一个有穷集合, 且至少包含:
 - 初始状态 q_s
 - 停机状态 q_t
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$

图灵机

定义 (图灵机, Turing Machine)

- 字母表 A 是一个有穷集合, 且至少 $0, 1 \in A$
- 方向 L, R
- 内部状态集 Q 也是一个有穷集合, 且至少包含:
 - 初始状态 q_s
 - 停机状态 q_t
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$

图灵机

定义 (图灵机, Turing Machine)

- 字母表 A 是一个有穷集合, 且至少 $0, 1 \in A$
- 方向 L, R
- 内部状态集 Q 也是一个有穷集合, 且至少包含:
 - 初始状态 q_s
 - 停机状态 q_t
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$

图灵机

定义 (图灵机, Turing Machine)

- 字母表 A 是一个有穷集合, 且至少 $0, 1 \in A$
- 方向 L, R
- 内部状态集 Q 也是一个有穷集合, 且至少包含:
 - 初始状态 q_s
 - 停机状态 q_t
- 指令集 $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$

图灵机

定义 (图灵机 , Turing Machine)

如果一个四元组 $(A, \{L, R\}, Q, \delta)$ 满足必要的唯一可读性条件 , A, Q 有穷且至少含有两个元素 ($0, 1$ 和 q_s, q_h) , $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$, 则我们称它是一个**图灵机**。

我们简记 $\langle q, a, a', q' \rangle \in \delta$ 为 $qaa'q'$, $\langle q, a, L, q' \rangle$ 、 $\langle q, a, R, q' \rangle$
类似

图灵机

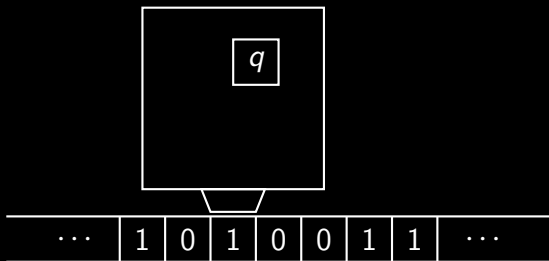
定义 (图灵机 , Turing Machine)

如果一个四元组 $(A, \{L, R\}, Q, \delta)$ 满足必要的唯一可读性条件, A, Q 有穷且至少含有两个元素 ($0, 1$ 和 q_s, q_h), $\delta \subseteq (Q \setminus \{q_h\}) \times A \times (A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$, 则我们称它是一个图灵机。

我们简记 $\langle q, a, a', q' \rangle \in \delta$ 为 $qaa'q'$, $\langle q, a, L, q' \rangle$ 、 $\langle q, a, R, q' \rangle$ 类似

图灵机

图灵机的直观：



图灵机

确定的 (deterministic) 图灵机与

非确定的 (non-deterministic) 图灵机

确定的图灵机要求 δ 是一个从 $(Q \setminus \{q_h\}) \times A$ 到

$(A \cup \{R, L\}) \times (Q \setminus \{q_s\})$ 的部分函数

图灵机

定义 (格局, configuration)

给定图灵机。一个格局是一个有穷序列 $u \langle q, a \rangle v$ (记 $uqav$) , 其中 u, v 是字母序列, q 是 (当前) 状态, a 是字母。

图灵机

定义 (图灵机的一步)

给定图灵机, δ 是指令集。令 $C = uqav$ 是一个格局。如果 $qa \notin \text{dom } \delta$, 则称 C 是一个 **终止格局**。否则, 我们定义由 C 通过一步计算得到的格局 C' 如下:

- 如果 $qaa'q' \in \delta$, 则 $C' = uq'a'v$
- 如果 $qaRq' \in \delta$, 则 $C' = uaq'bv'$ ($v = bv'$)
- 如果 $qaLq' \in \delta$, 则 $C' = u'q'bav$ ($u = u'b$)

图灵机

定义 (图灵机的一步)

给定图灵机, δ 是指令集。令 $C = uqav$ 是一个格局。如果 $qa \notin \text{dom } \delta$, 则称 C 是一个 **终止格局**。否则, 我们定义由 C 通过一步计算得到的格局 C' 如下:

- 如果 $qaa'q' \in \delta$, 则 $C' = uq'a'v$
- 如果 $qaRq' \in \delta$, 则 $C' = uaq'bv'$ ($v = bv'$)
- 如果 $qaLq' \in \delta$, 则 $C' = u'q'bav$ ($u = u'b$)

图灵机

定义 (图灵机的一步)

给定图灵机, δ 是指令集。令 $C = uqav$ 是一个格局。如果 $qa \notin \text{dom } \delta$, 则称 C 是一个 **终止格局**。否则, 我们定义由 C 通过一步计算得到的格局 C' 如下:

- 如果 $qaa'q' \in \delta$, 则 $C' = uq'a'v$
- 如果 $qaRq' \in \delta$, 则 $C' = uaq'bv'$ ($v = bv'$)
- 如果 $qaLq' \in \delta$, 则 $C' = u'q'bav$ ($u = u'b$)

图灵机

定义 (图灵机的一步)

给定图灵机, δ 是指令集。令 $C = uqav$ 是一个格局。如果 $qa \notin \text{dom } \delta$, 则称 C 是一个 **终止格局**。否则, 我们定义由 C 通过一步计算得到的格局 C' 如下:

- 如果 $qaa'q' \in \delta$, 则 $C' = uq'a'v$
- 如果 $qaRq' \in \delta$, 则 $C' = uaq'b'v'$ ($v = b'v'$)
- 如果 $qaLq' \in \delta$, 则 $C' = u'q'bav$ ($u = u'b$)

图灵机

定义 (图灵机的一步)

给定图灵机, δ 是指令集。令 $C = uqav$ 是一个格局。如果 $qa \notin \text{dom } \delta$, 则称 C 是一个 **终止格局**。否则, 我们定义由 C 通过一步计算得到的格局 C' 如下:

- 如果 $qaa'q' \in \delta$, 则 $C' = uq'a'v$
- 如果 $qaRq' \in \delta$, 则 $C' = uaq'b'v'$ ($v = b'v'$)
- 如果 $qaLq' \in \delta$, 则 $C' = u'q'bav$ ($u = u'b$)

图灵机

定义 (图灵机的计算)

给定图灵机。它的一个**计算**是一个 (可能无穷长的) 格局序列 $\langle C_i \rangle_{i < N}$, 对任意 $i < N$, 若 C_i 不是终止格局, 那么 $i + 1 < N$ 且 C_{i+1} 是由 C_i 通过一步计算得到的格局。

图灵机

约定

- 当我们说“输入 $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$ ”时，我们指图灵机处于格局 $q_s 1^{x_1+1} 0 1^{x_2+1} \dots 0 1^{x_n+1}$
- 当我们说“输出 $y \in \mathbb{N}$ ”时，我们指图灵机处于格局 $q_h 1^y$

图灵机

定义 (图灵机可计算函数)

令 $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个部分函数, M 是一个图灵机。我们称 M 计算 f , 当且仅当

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} y & \text{存在一个输入 } \bar{x} \text{ 输出 } y \text{ 的 } M \text{ 计算} \\ \uparrow & \text{否则} \end{cases}$$

我们称一个函数是图灵可计算的, 当且仅当存在一个计算它的图灵机

图灵机

定义 (图灵机可计算函数)

令 $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ 是一个部分函数, M 是一个图灵机。我们称 M 计算 f , 当且仅当

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} y & \text{存在一个输入 } \bar{x} \text{ 输出 } y \text{ 的 } M \text{ 计算} \\ \uparrow & \text{否则} \end{cases}$$

我们称一个函数是图灵可计算的, 当且仅当存在一个计算它的图灵机

图灵机

例

- 后继函数
- 加法

图灵机

例

- 后继函数
- 加法

写一个图灵机操作系统

我们将常用的操作定义为一个一个“宏”

- 右移、左移一格 : $R = \{q_s a R q_h\}_{a \in A}$, $L = \{q_s a L q_h\}_{a \in A}$
- 打印、擦除 : $P_a = \{q_s b a q_h\}_{b \in A}$
- 移动到下一个 a :

$$R_a = \{q_s b R q_1\}_{b \in A} \cup \{q_1 b R q_1\}_{b \in A \setminus \{a\}} \cup \{q_1 a a q_h\}$$

写一个图灵机操作系统

我们将常用的操作定义为一个一个“宏”

- 右移、左移一格 : $R = \{q_s a R q_h\}_{a \in A}$, $L = \{q_s a L q_h\}_{a \in A}$
- 打印、擦除 : $P_a = \{q_s b a q_h\}_{b \in A}$
- 移动到下一个 a :

$$R_a = \{q_s b R q_1\}_{b \in A} \cup \{q_1 b R q_1\}_{b \in A \setminus \{a\}} \cup \{q_1 a a q_h\}$$

写一个图灵机操作系统

我们将常用的操作定义为一个一个“宏”

- 右移、左移一格 : $R = \{q_s a R q_h\}_{a \in A}$, $L = \{q_s a L q_h\}_{a \in A}$
- 打印、擦除 : $P_a = \{q_s b a q_h\}_{b \in A}$
- 移动到下一个 a :

$$R_a = \{q_s b R q_1\}_{b \in A} \cup \{q_1 b R q_1\}_{b \in A \setminus \{a\}} \cup \{q_1 a a q_h\}$$

写一个图灵机操作系统

我们将常用的操作定义为一个一个“宏”

- 右移、左移一格 : $R = \{q_s a R q_h\}_{a \in A}$, $L = \{q_s a L q_h\}_{a \in A}$
- 打印、擦除 : $P_a = \{q_s b a q_h\}_{b \in A}$
- 移动到下一个 a :

$$R_a = \{q_s b R q_1\}_{b \in A} \cup \{q_1 b R q_1\}_{b \in A \setminus \{a\}} \cup \{q_1 a a q_h\}$$

写一个图灵机操作系统

我们将常用的操作定义为一个一个“宏”

- 右移、左移一格 : $R = \{q_s a R q_h\}_{a \in A}$, $L = \{q_s a L q_h\}_{a \in A}$
- 打印、擦除 : $P_a = \{q_s b a q_h\}_{b \in A}$
- 移动到下一个 a :

$$R_a = \{q_s b R q_1\}_{b \in A} \cup \{q_1 b R q_1\}_{b \in A \setminus \{a\}} \cup \{q_1 a a q_h\}$$

写一个图灵机操作系统

我们将常用的操作定义为一个一个“宏”

- 右移、左移一格 : $R = \{q_s a R q_h\}_{a \in A}$, $L = \{q_s a L q_h\}_{a \in A}$
- 打印、擦除 : $P_a = \{q_s b a q_h\}_{b \in A}$
- 移动到下一个 a :

$$R_a = \{q_s b R q_1\}_{b \in A} \cup \{q_1 b R q_1\}_{b \in A \setminus \{a\}} \cup \{q_1 a a q_h\}$$

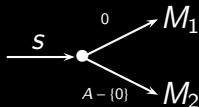
写一个图灵机操作系统

图灵机 M_1 、 M_2 的串接：定义 M_1M_2 的

- 字母表取并
- 状态集取不交并，增加新的初始、终止状态 q_s, q_h
- 指令集取根据状态集变化做相应修改后的并，增加衔接指令 $\{q_h^1 a a q_s^2\}_{a \in A}$ 、开始指令 $\{q_s a a q_s^1\}_{a \in A}$ 、终止指令 $\{q_h^2 a a q_h\}_{a \in A}$

写一个图灵机操作系统

条件判断：定义



- 字母表取并
- 状态集取不交并，增加新的初始、终止状态 q_s, q_h
- 指令集取根据状态集变化做相应修改后的并，增加条件判断指令 $\{q_s 0 0 q_s^1\} \cup \{q_s a a q_s^2\}_{a \in A \setminus \{0\}}$ 、终止指令 $\{q_h^i a a q_h\}_{a \in A, i=1,2}$

写一个图灵机操作系统

例：

$$\pi_i^n$$

写一个图灵机操作系统

Ctrl+C / Ctrl +V

- 删除右侧的连续 a 串： $q_s 0 a \dots ab \Rightarrow q_h 0 0 \dots 0 b$
- 将右侧连续 a 串 **复制/剪切** 到右侧第一个 $\$$ 标记处：

$q_s 0 a \dots ab \dots \$ \dots$

↓

$q_h 0 a \dots ab \dots a \dots a \$$

写一个图灵机操作系统

Ctrl+C / Ctrl +V

- 删除右侧的连续 a 串： $q_s 0 a \dots ab \Rightarrow q_h 0 0 \dots 0 b$
- 将右侧连续 a 串 **复制**/ 剪切到右侧第一个 $\$$ 标记处：

$q_s 0 a \dots ab \dots \$ \dots$

↓

$q_h 0 a \dots ab \dots a \dots a \$$

写一个图灵机操作系统

Ctrl+C / Ctrl +V

- 删除右侧的连续 a 串： $q_s0a\dots ab \Rightarrow q_h00\dots 0b$
- 将右侧连续 a 串 复制/ 剪切到右侧第一个 $\$$ 标记处：

$q_s0a\dots ab\dots \$\dots$

↓

$q_h00\dots 0b\dots a\dots a\$$

习题：

7.3 全部