前情提要

前情提要

原始递归集合/关系/谓词：

即特征函数是原始递归函数的集合/关系/谓词

派生的原始递归函数/谓词构造方式：

- 分情形定义
- 有界量词
- 有界和/有界积
- 有界极小算子

前情提要

原始递归集合/关系/谓词：

即特征函数是原始递归函数的集合/关系/谓词

派生的原始递归函数/谓词构造方式：

- 分情形定义
- 有界量词
- 有界和/有界积
- 有界极小算子

前情提要

已知的原始递归函数

- 初始函数 :(0 元) 零函数、后继函数、投射函数
- 常数函数 c_k^n
- 算术 : 加法、乘法、指数、阶乘、前驱 $\mathrm{pred}(x)$、截断减法 $\dot{-}$、求商 quo、求余 rem

前情提要

已知的原始递归函数

- **初始函数**：（0 元）零函数、后继函数、投射函数
- 常数函数 c_k^n
- 算术：加法、乘法、指数、阶乘、前驱 $\mathrm{pred}(x)$、截断减法 $\dot{-}$、求商 quo、求余 rem

前情提要

已知的原始递归函数

- 初始函数 ：(0 元) 零函数、后继函数、投射函数
- 常数函数 c_k^n
- 算术：加法、乘法、指数、阶乘、前驱 pred(x)、截断减法 $\dot{-}$、求商 quo、求余 rem

前情提要

已知的原始递归函数

- 初始函数 ：(0 元) 零函数、后继函数、投射函数
- 常数函数 c_k^n
- 算术：加法、乘法、指数、阶乘、前驱 $\mathrm{pred}(x)$、截断减法 $\dot{-}$、求商 quo、求余 rem

前情提要

已知的原始递归函数

- 初始函数：(0元) 零函数、后继函数、投射函数
- 常数函数 c_k^n
- 算术：加法、乘法、指数、阶乘、前驱 $\mathrm{pred}(x)$、截断减法 $\dot{-}$、求商 quo、求余 rem

前情提要

已知的原始递归函数

- 非零检测函数 σ、零检测（否定）函数 δ
- 第 n 个素数 p_n
- 关于有穷序列的函数： 长度函数 lh、分量函数 $(a)_i$、串接函数 $a \frown b$

前情提要

已知的原始递归集合/关系/谓词

- 如果 $f(\bar{x})$ 是一个原始递归函数，那么 $\{(\bar{x}, y) \mid f(\bar{x}) = y\}$ 是个原始递归关系
- 整除关系、素数、合数
- 有穷序列的哥德尔数

历史函数与强递归

原始递归保持可计算性的直观：计算 $f(y+1)$ 的时候可以用 $f(y)$ 的结果。但直观上，我们也可以用更早的结果，只要我们把这些结果“存储”下来供后续程序调用即可。

历史函数与强递归

原始递归保持可计算性的直观：计算 $f(y+1)$ 的时候可以用 $f(y)$ 的结果。但直观上，我们也可以用更早的结果，只要我们把这些结果“存储”下来供后续程序调用即可。

历史函数与强递归

定义 (历史函数)

令 $f(\bar{x}, y)$ 是 $k+1$ 元全函数，定义它的**历史函数**：

$$F(\bar{x}, n) = \langle f(\bar{x}, 0), \ldots, f(\bar{x}, n) \rangle$$

历史函数与强递归

定义

给定 k 元函数 g、$k+2$ 元函数 h，称 $k+1$ 元函数 f 是从 g 和 h 经强递归得到的，如果

$$f(\bar{x},0)=g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1)=h(\bar{x},y,F(\bar{x},y))$$

引理

原始递归函数在强递归下保持

历史函数与强递归

定义

给定 k 元函数 g、$k+2$ 元函数 h，称 $k+1$ 元函数 f 是从 g 和 h 经强递归得到的，如果

$$f(\bar{x},0)=g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x},y+1)=h(\bar{x},y,F(\bar{x},y))$$

引理

原始递归函数在强递归下保持

所有的可计算函数都是原始递归函数吗？

不。对角线法

有没有更具体的例子？

所有的可计算函数都是原始递归函数吗？

不。对角线法

有没有更具体的例子？

所有的可计算函数都是原始递归函数吗？

不。对角线法

有没有更具体的例子？

所有的可计算函数都是原始递归函数吗？

不。对角线法

有没有更具体的例子？

阿克曼函数

定义 (阿克曼函数)

阿克曼函数 (Ackermann function) 是满足下列等式的二元函数：

$$A(0, y) = y + 1$$

$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$

$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$$

阿克曼函数

引理

阿克曼函数是全函数

习题

显然，阿克曼函数是能行可计算的。

阿克曼函数

引理

阿克曼函数是全函数

习题

显然，阿克曼函数是能行可计算的。

阿克曼函数

引理

阿克曼函数是全函数

习题

显然，阿克曼函数是能行可计算的。

阿克曼函数

我们可以归纳地证明：

$$A(1, y) = y + 2$$

$$A(2, y) = 2y + 3$$

$$A(3, y) = 2^{y+3} - 3$$

$$\cdots\cdots$$

引理

阿克曼函数不是原始递归函数

直观：每个原始递归函数的增长速度都比阿克曼函数的某一列慢

习题

引理

阿克曼函数不是原始递归函数

直观：每个原始递归函数的增长速度都比阿克曼函数的某一列慢

习题

引理

阿克曼函数不是原始递归函数

直观：每个原始递归函数的增长速度都比阿克曼函数的某一列慢

习题

递归函数

我们将定义一类“递归函数”以囊括阿克曼函数以及通过对角线法构造的直觉上可计算的函数

定义 (正则 μ 算子)

令 f 是一个 $k+1$ 元全函数。我们称 g 是一个从 f 通过 正则 μ 算子 得到的，如果 对任意 $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ 都存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\bar{x}, y) = 0$（正则性条件），并且 $g(\bar{x}) =$ 最小的使得 $f(\bar{x}, y) = 0$ 的 y。或记为，$g(\bar{x}) = \mu y[f(\bar{x}, y) = 0]$

此时，我们记 $g = \mu_r(f)$

我们将定义一类“递归函数”以囊括阿克曼函数以及通过对角线法构造的直觉上可计算的函数

定义 (正则 μ 算子)

令 f 是一个 $k+1$ 元全函数。我们称 g 是一个从 f 通过 正则 μ 算子 得到的，如果 对任意 $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ 都存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\bar{x}, y) = 0$（正则性条件），并且 $g(\bar{x}) =$ 最小的使得 $f(\bar{x}, y) = 0$ 的 y。或记为，$g(\bar{x}) = \mu y[f(\bar{x}, y) = 0]$

此时，我们记 $g = \mu_r(f)$

递归函数

我们将定义一类“递归函数”以囊括阿克曼函数以及通过对角线法构造的直觉上可计算的函数

定义 (正则 μ 算子)

令 f 是一个 $k+1$ 元全函数。我们称 g 是一个从 f 通过 正则 μ 算子 得到的，如果 对任意 $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ 都存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\bar{x}, y) = 0$（正则性条件），并且 $g(\bar{x}) =$ 最小的使得 $f(\bar{x}, y) = 0$ 的 y。或记为，$g(\bar{x}) = \mu y[f(\bar{x}, y) = 0]$

此时，我们记 $g = \mu_r(f)$

递归函数

我们将定义一类“递归函数”以囊括阿克曼函数以及通过对角线法构造的直觉上可计算的函数

定义 (正则 μ 算子)

令 f 是一个 $k+1$ 元全函数。我们称 g 是一个从 f 通过 正则 μ 算子 得到的，如果 对任意 $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ 都存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $f(\bar{x}, y) = 0$（正则性条件），并且 $g(\bar{x}) =$ 最小的使得 $f(\bar{x}, y) = 0$ 的 y。或记为，$g(\bar{x}) = \mu y[f(\bar{x}, y) = 0]$

此时，我们记 $g = \mu_r(f)$

递归函数

直观：

- 如果 f 是全函数且满足正则性条件，那么 $g = \mu_r(f)$ 也是全函数
- 如果 f 是能行可计算的，那么 g 也是能行可计算的

递归函数

直观：

- 如果 f 是全函数且满足正则性条件，那么 $g = \mu_r(f)$ 也是全函数
- 如果 f 是能行可计算的，那么 g 也是能行可计算的

递归函数

定义 (递归函数)

递归函数是最小的包涵初始函数并且在函数符合、原始递归、正则 μ 算子下封闭的一类函数

事实：

- 原始递归函数都是递归函数
- 递归函数都是全函数

递归函数

定义 (递归函数)

递归函数是最小的包涵初始函数并且在函数符合、原始递归、正则 μ 算子下封闭的一类函数

事实：

- 原始递归函数都是递归函数
- 递归函数都是全函数

递归函数

定义 (递归函数)

递归函数是最小的包涵初始函数并且在函数符合、原始递归、正则 μ 算子下封闭的一类函数

事实：

- 原始递归函数都是递归函数
- 递归函数都是全函数

递归函数

定义 (递归集合/关系/谓词)

集合/关系/谓词 A 是递归的，当且仅当 χ_A 是递归函数

引理

如果 $k+1$ 元谓词 P 是递归的，并且对任意 $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ 存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $P(\bar{x}, y)$（正则性条件），那么

$$g(\bar{x}) = \mu y P(\bar{x}, y)$$

是递归函数。

递归函数

定义 (递归集合/关系/谓词)

集合/关系/谓词 A 是递归的，当且仅当 χ_A 是递归函数

引理

如果 $k+1$ 元谓词 P 是递归的，并且对任意 $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$ 存在 $y \in \mathbb{N}$ 使得 $P(\bar{x}, y)$ （正则性条件），那么

$$g(\bar{x}) = \mu y P(\bar{x}, y)$$

是递归函数。

递归函数

之前的对角线法能用来说明存在一个可计算的不是递归的函数吗？

命题

阿克曼函数是递归函数

Proof.

定义 $S \subset \mathbb{N}^3$ 是 好的，如果它满足：

- 若 $(0, y, z) \in S$，则 $z = y + 1$
- 若 $(x + 1, 0, z) \in S$，则 $(x, 1, z) \in S$
- 若 $(x + 1, y + 1, z) \in S$，则存在 u 使得 $(x, u, z) \in S$ 且 $(x + 1, y, u) \in S$

命题

阿克曼函数是递归函数

Proof.

定义 $S \subset \mathbb{N}^3$ 是 好的，如果它满足：

- 若 $(0, y, z) \in S$，则 $z = y + 1$
- 若 $(x+1, 0, z) \in S$，则 $(x, 1, z) \in S$
- 若 $(x+1, y+1, z) \in S$，则存在 u 使得 $(x, u, z) \in S$ 且 $(x+1, y, u) \in S$

习题：

7.2.1、7.2.2

证明：一个函数 f 是原始递归的，当且仅当

- 它是一个原始递归关系
- 存在一个原始递归函数 g，使得对任意 $\bar{x}$，$f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$

证明：对任意 $x, y \in \mathbb{N}$ 存在一个 Nice 的有穷集合 S，使得 $(x, y) \in \operatorname{dom} S$