前情提要

前情提要

原始递归函数

- 初始函数 ：(0 元) 零函数、后继函数、投射函数
- 函数复合
- 原始递归

前情提要

原始递归函数

- 初始函数：（0 元）零函数、后继函数、投影函数
- 函数复合
- 原始递归

前情提要

原始递归函数

- 初始函数：(0 元) 零函数、后继函数、投影函数
- 函数复合
- 原始递归

前情提要

原始递归函数

- 初始函数 ：(0 元) 零函数、后继函数、投射函数
- 函数复合
- 原始递归

前情提要

原始递归函数

- 初始函数：(0 元) 零函数、后继函数、投射函数
- 函数复合
- 原始递归

原始递归集合/关系/谓词

术语滥用

一个 k 元谓词 R 是一个算术语言公式 $\varphi(\bar{x})$ 的缩写

我们又经常把 k 元谓词 R 等同于自然数上的 k 元关系

$$R^{\mathfrak{N}} = \left\{ \bar{n} \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \mathfrak{N} \vDash \varphi[\bar{n}] \right\}$$

类似地，$\neg R = \mathbb{N} \setminus R^{\mathfrak{N}} = (R^{\mathfrak{N}})^{\mathbb{C}}$、$P \wedge R = P^{\mathfrak{N}} \cap R^{\mathfrak{N}}$ ……

原始递归集合/关系/谓词

术语滥用

一个 k 元谓词 R 是一个算术语言公式 $\varphi(\bar{x})$ 的缩写

我们又经常把 k 元谓词 R 等同于自然数上的 k 元关系

$$R^{\mathfrak{N}} = \left\{ \bar{n} \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \mathfrak{N} \vDash \varphi[\bar{n}] \right\}$$

类似地，$\neg R = \mathbb{N} \setminus R^{\mathfrak{N}} = (R^{\mathfrak{N}})^{\complement}$、$P \wedge R = P^{\mathfrak{N}} \cap R^{\mathfrak{N}}$ ……

原始递归集合/关系/谓词

术语滥用

一个 k 元谓词 R 是一个算术语言公式 $\varphi(\bar{x})$ 的缩写

我们又经常把 k 元谓词 R 等同于自然数上的 k 元关系

$$R^{\mathfrak{N}} = \left\{ \bar{n} \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; \mathfrak{N} \vDash \varphi[\bar{n}] \right\}$$

类似地，$\neg R = \mathbb{N} \setminus R^{\mathfrak{N}} = (R^{\mathfrak{N}})^{\mathbb{C}}$、$P \wedge R = P^{\mathfrak{N}} \cap R^{\mathfrak{N}}$ ……

原始递归集合/关系/谓词

定义 (特征函数)

令 R 是一个自然数上的 k 元关系/谓词，我们定义它的**特征函数**

$$\chi_R(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{若 } \bar{x} \in R\,; \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

注意：R 是一个 k 元关系，则 χ_R 是一个 k 元全函数。

原始递归集合/关系/谓词

定义

我们称一个 k 元关系/谓词是原始递归的，当且仅当它的特征函数是原始递归函数。

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$；
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$；
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^\complement} = \delta \circ \chi_A$；
- $\chi_{A\cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$；
- $\chi_{A\cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$；
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$；
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$;
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$;
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$；
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$；
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$；
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$；
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$；
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$；
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理

原始递归函数/谓词在交、并、补下封闭

Proof.

- $\chi_{A^{\complement}} = \delta \circ \chi_A$;
- $\chi_{A \cap B} = \mathrm{Cpo}(\cdot, \chi_A, \chi_B)$;
- $\chi_{A \cup B} = \mathrm{Cpo}(\sigma, \mathrm{Cpo}(+, \chi_A, \chi_B))$

原始递归集合/关系/谓词

引理 (分情形定义，Case defined function)

如果 P 是原始递归谓词，f_1 和 f_2 是原始递归函数，则函数

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) & \text{如果 } P(\bar{x}) \text{ 成立；} \\ f_2(\bar{x}) & \text{否则} \end{cases}$$

也是原始递归的。

Proof.

$$f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) \cdot \chi_p(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \cdot \delta(\chi_P(\bar{x}))$$

推论 (分情形定义，原始递归定义版本)

如果 g, h_1, h_2, P 是原始递归的，令 f 满足：

$$
\begin{aligned}
f(\bar{x}, 0) &= g(\bar{x}), \\
f(\bar{x}, y+1) &= \begin{cases} h_1(x, y, f(x, y)) & \text{若 } (x, y, f(x, y)) \in P, \\ h_2(x, y, f(x, y)) & \text{否则} \end{cases}
\end{aligned}
$$

那么 f 也是原始递归的

引理

求余函数 rem、求商函数 quo 都是原始递归的

Proof.

$$\mathrm{rem}(x, 0) = 0$$

$$\mathrm{rem}(x, y+1) = \begin{cases} \mathrm{rem}(x, y) + 1, & \text{如果 } \mathrm{rem}(x, y) + 1 \neq x\text{;} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

除法

引理

求余函数 rem、求商函数 quo 都是原始递归的

Proof.

$$\mathrm{rem}(x, 0) = 0$$

$$\mathrm{rem}(x, y+1) = \begin{cases} \mathrm{rem}(x, y) + 1, & \text{如果 } \mathrm{rem}(x, y) + 1 \neq x\text{；} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

除法

引理

求余函数 rem、求商函数 quo 都是原始递归的

Proof.

$$\mathrm{quo}(x,0) = 0$$

$$\mathrm{quo}(x,y+1) = \begin{cases} \mathrm{quo}(x,y)+1, & \text{如果 } \mathrm{rem}(x,y)+1 = x\text{；} \\ \mathrm{quo}(x,y), & \text{否则。} \end{cases}$$

有界量词

假设二元谓词 $R(x, y)$ 是能行可判定的，谓词 $P(x) =_{\mathrm{df}} \exists y R(x, y)$ 未必是能行可判定的。

例子：？

但给定自然数 n，谓词 $P'(x) := (\exists y < n) R(x, y)$ 一定是能行可判定的

有界量词

引理 (有界和、有界积保持原始递归)

如果 $f(\bar{x}, y)$ 是原始递归的。那么有界和 $\sum_{y\leq z} f(\bar{x}, y)$ 和有界积 $\prod_{y\leq z} f(\bar{x}, y)$ 都是原始递归的。

Proof.

令 $g(\bar{x}, z) = \sum_{y\leq z} f(\bar{x}, y)$。注意

$$g(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}, 0)$$

$$g(\bar{x}, z+1) = g(\bar{x}, z) + f(\bar{x}, z+1)$$

有界量词

引理 (有界和、有界积保持原始递归)

如果 $f(\bar{x}, y)$ 是原始递归的。那么有界和 $\sum_{y\leq z} f(\bar{x}, y)$ 和有界积 $\prod_{y\leq z} f(\bar{x}, y)$ 都是原始递归的。

Proof.

令 $g(\bar{x}, z) = \sum_{y\leq z} f(\bar{x}, y)$。注意

$$g(\bar{x}, 0) = f(\bar{x}, 0)$$

$$g(\bar{x}, z+1) = g(\bar{x}, z) + f(\bar{x}, z+1)$$

有界量词

引理 (有界量词保持原始递归)

假设谓词 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的，那么谓词 $E(\bar{x}, y) := (\exists z \leq y) P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}, y) := (\forall z \leq y) P(\bar{x}, z)$ 也是原始递归的。

Proof.

$\chi_A(\bar{x}, y) = \prod_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z)$

$\chi_E(\bar{x}, y) = \sigma\left(\sum_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z) \right)$

有界量词

引理 (有界量词保持原始递归)

假设谓词 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的，那么谓词 $E(\bar{x}, y) := (\exists z \leq y) P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}, y) := (\forall z \leq y) P(\bar{x}, z)$ 也是原始递归的。

Proof.

$\chi_A(\bar{x}, y) = \prod_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z)$

$\chi_E(\bar{x}, y) = \sigma\left(\sum_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z) \right)$

有界量词

引理 (有界量词保持原始递归)

假设谓词 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的，那么谓词 $E(\bar{x}, y) := (\exists z \leq y)P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}, y) := (\forall z \leq y)P(\bar{x}, z)$ 也是原始递归的。

Proof.

$\chi_A(\bar{x}, y) = \prod_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z)$

$\chi_E(\bar{x}, y) = \sigma\left(\sum_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z)\right)$

引理 (有界量词保持原始递归)

假设谓词 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的，那么谓词 $E(\bar{x}, y) := (\exists z \leq y) P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}, y) := (\forall z \leq y) P(\bar{x}, z)$ 也是原始递归的。

Proof.

$\chi_A(\bar{x}, y) = \prod_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z)$

$\chi_E(\bar{x}, y) = \sigma\left(\sum_{z \leq y} \chi_P(\bar{x}, z)\right)$

有界极小算子

定义 (有界极小算子)

令 $P(\bar{x}, z)$ 为一个 $(k+1)$-元的谓词。定义

$$(\mu z \leq y) P(\bar{x}, z) = \begin{cases} \text{最小的满足 } P(\bar{x}, z) \text{ 且 } \leq y \text{ 的 } z, & \text{如果存在；} \\ y + 1, & \text{否则。} \end{cases}$$

有界极小算子

引理 (有界极小算子保持原始递归)

若 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归谓词，那么函数

$$f(\bar{x}, z) = (\mu z \leq y) P(\bar{x}, z)$$

也是原始递归的

Proof.

$f(\bar{x}, z) = \sum_{z=0}^{y} \prod_{r=0}^{z} \chi_{\neg P}(\bar{x}, r)$

强版本的 μ 算子保持引理

引理

假设 $f(\bar{x}, y)$ 和 $g(\bar{x}, z)$ 是原始递归的，那么

$$\sum_{y \leq g(\bar{x},z)} f(\bar{x}, y) \quad \text{和} \quad \prod_{y \leq g(\bar{x},z)} f(\bar{x}, y)$$

都是原始递归的

习题

强版本的 μ 算子保持引理

引理

假设 $f(\bar{x}, y)$ 和 $g(\bar{x}, z)$ 是原始递归的，那么

$$\sum_{y \le g(\bar{x}, z)} f(\bar{x}, y) \quad \text{和} \quad \prod_{y \le g(\bar{x}, z)} f(\bar{x}, y)$$

都是原始递归的

习题

强版本的 μ 算子保持引理

引理

如果 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归谓词，$g(\bar{x}, y)$ 是原始递归函数，那么

- 谓词 $E(\bar{x}y) := (\exists z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}y) := (\forall z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 都是原始递归的
- 函数 $f(\bar{x}, y) = (\mu z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的

习题

强版本的 μ 算子保持引理

引理

如果 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归谓词，$g(\bar{x}, y)$ 是原始递归函数，那么

- 谓词 $E(\bar{x}y) := (\exists z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}y) := (\forall z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 都是原始递归的
- 函数 $f(\bar{x}, y) = (\mu z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的

习题

强版本的 μ 算子保持引理

引理

如果 $P(\bar{x}, z)$ 是原始递归谓词，$g(\bar{x}, y)$ 是原始递归函数，那么

- 谓词 $E(\bar{x}y) := (\exists z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 和 $A(\bar{x}y) := (\forall z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 都是原始递归的
- 函数 $f(\bar{x}, y) = (\mu z \leq g(\bar{x}, y))P(\bar{x}, z)$ 是原始递归的

习题

强版本的 μ 算子保持引理

引理

如果 $P(\bar{x}, z, y, r)$ 是原始递归谓词，g_0, g_1 是原始递归函数，那么函数

$$f(\bar{x}, 0) = g_0(\bar{x})$$

$$f(\bar{x}, y+1) = (\mu z \leq g_1(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)))P(\bar{x}, z, y, f(\bar{x}, y))$$

也是原始递归的

习题

强版本的 μ 算子保持引理

引理

如果 $P(\bar{x}, z, y, r)$ 是原始递归谓词，g_0, g_1 是原始递归函数，那么函数

$$f(\bar{x}, 0) = g_0(\bar{x})$$

$$f(\bar{x}, y+1) = (\mu z \leq g_1(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)))P(\bar{x}, z, y, f(\bar{x}, y))$$

也是原始递归的

习题

编码有穷序列

在自然数的语言中谈论自然数的有穷序列

引理

- 整除关系是原始递归关系
- 素数、合数是原始递归集合
- 函数 $p(n) :=$ 第 n 个素数是原始递归函数

Proof.

Bertrand's postulate: $p_{n+1} < 2p_n$

编码有穷序列

在自然数的语言中谈论自然数的有穷序列

引理

- 整除关系是原始递归关系
- 素数、合数是原始递归集合
- 函数 $p(n) :=$ 第 n 个素数是原始递归函数

Proof.

Bertrand's postulate: $p_{n+1} < 2p_n$

编码有穷序列

在自然数的语言中谈论自然数的有穷序列

引理

- 整除关系是原始递归关系
- 素数、合数是原始递归集合
- 函数 $p(n) :=$ 第 n 个素数是原始递归函数

Proof.

Bertrand's postulate: $p_{n+1} < 2p_n$

编码有穷序列

在自然数的语言中谈论自然数的有穷序列

引理

- 整除关系是原始递归关系
- 素数、合数是原始递归集合
- 函数 $p(n) :=$ 第 n 个素数是原始递归函数

Proof.

Bertrand's postulate: $p_{n+1} < 2p_n$

编码有穷序列

在自然数的语言中谈论自然数的有穷序列

引理

- 整除关系是原始递归关系
- 素数、合数是原始递归集合
- 函数 $p(n) :=$ 第 n 个素数是原始递归函数

Proof.

Bertrand's postulate: $p_{n+1} < 2p_n$

编码有穷序列

定义 (有穷序列的哥德尔编码)

$\langle\rangle := 1$, $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle := p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$

我们称 $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ 是有穷序列 $(a_0, \ldots, a_n)$ 的哥德尔编码

例：

- (0) 的哥德尔编码 $\langle 0\rangle = p_0^1 = 2$
- $\langle a_0, \ldots, a_n, 0\rangle = \langle a_0, \ldots, a_n\rangle \cdot p_{n+1}$

编码有穷序列

定义 (有穷序列的哥德尔编码)

$\langle\rangle := 1$, $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle := p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$

我们称 $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ 是有穷序列 $(a_0, \ldots, a_n)$ 的**哥德尔编码**

例：

- (0) 的哥德尔编码 $\langle 0\rangle = p_0^1 = 2$
- $\langle a_0, \ldots, a_n, 0\rangle = \langle a_0, \ldots, a_n\rangle \cdot p_{n+1}$

编码有穷序列

定义 (有穷序列的哥德尔编码)

$\langle\rangle := 1$, $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle := p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$

我们称 $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ 是有穷序列 $(a_0, \ldots, a_n)$ 的**哥德尔编码**

例：

- (0) 的哥德尔编码 $\langle 0\rangle = p_0^1 = 2$
- $\langle a_0, \ldots, a_n, 0\rangle = \langle a_0, \ldots, a_n\rangle \cdot p_{n+1}$

编码有穷序列

定义 (有穷序列的哥德尔编码)

$\langle\rangle := 1$, $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle := p_0^{a_0+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$

我们称 $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ 是有穷序列 $(a_0, \ldots, a_n)$ 的哥德尔编码

例：

- (0) 的哥德尔编码 $\langle 0\rangle = p_0^1 = 2$
- $\langle a_0, \ldots, a_n, 0\rangle = \langle a_0, \ldots, a_n\rangle \cdot p_{n+1}$

编码有穷序列

命题

- 对任意 n，函数 $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ 是原始递归的
- $\langle a_0, \dots, a_n \rangle = \langle b_0, \dots, b_n \rangle$，当且仅当对任意 $i \le n$ 有 $a_i = b_i$

习题

编码有穷序列

命题

- 对任意 n，函数 $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ 是原始递归的
- $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle = \langle b_0, \ldots, b_n \rangle$，当且仅当对任意 $i \leq n$ 有 $a_i = b_i$

习题

编码有穷序列

命题

- 对任意 n，函数 $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ 是原始递归的
- $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle = \langle b_0, \ldots, b_n \rangle$，当且仅当对任意 $i \leq n$ 有 $a_i = b_i$

习题

编码有穷序列

定义 (有穷序列的长度函数)

定义 $\mathrm{lh}(a) := (\mu k \leq a) p_k \nmid a$

命题

- $\mathrm{lh}(x)$ 是原始递归的
- $\mathrm{lh}(\langle\rangle) = 0$、$\mathrm{lh}(\langle a_0, \ldots, a_n \rangle) = n + 1$

习题

编码有穷序列

定义 (有穷序列的长度函数)

定义 $\mathrm{lh}(a) := (\mu k \leq a) p_k \nmid a$

命题

- $\mathrm{lh}(x)$ 是原始递归的
- $\mathrm{lh}(\langle\rangle) = 0$、$\mathrm{lh}(\langle a_0, \ldots, a_n \rangle) = n + 1$

习题

编码有穷序列

定义 (有穷序列的长度函数)

定义 $\mathrm{lh}(a) := (\mu k \leq a) p_k \nmid a$

命题

- $\mathrm{lh}(x)$ 是原始递归的
- $\mathrm{lh}(\langle\rangle) = 0$、$\mathrm{lh}(\langle a_0, \ldots, a_n \rangle) = n + 1$

习题

编码有穷序列

定义 (有穷序列的长度函数)

定义 $\mathrm{lh}(a) := (\mu k \leq a) p_k \nmid a$

命题

- $\mathrm{lh}(x)$ 是原始递归的
- $\mathrm{lh}(\langle\rangle) = 0$、$\mathrm{lh}(\langle a_0, \ldots, a_n\rangle) = n + 1$

习题

编码有穷序列

定义 (分量函数)

定义关于 a 和 i 的二元函数 $(a)_i := (\mu k \leq a) p_i^{k+2} \nmid a$

命题

- $(x)_y$ 是原始递归的
- $(\langle a_0, \ldots, a_n \rangle)_i = a_i \quad (0 \leq i \leq n)$

编码有穷序列

定义 (分量函数)

定义关于 a 和 i 的二元函数 $(a)_i := (\mu k \leq a) p_i^{k+2} \nmid a$

命题

- $(x)_y$ 是原始递归的
- $(\langle a_0, \ldots, a_n \rangle)_i = a_i \quad (\, 0 \leq i \leq n \,)$

编码有穷序列

定义 (分量函数)

定义关于 a 和 i 的二元函数 $(a)_i := (\mu k \leq a) p_i^{k+2} \nmid a$

命题

- $(x)_y$ 是原始递归的
- $(\langle a_0, \ldots, a_n \rangle)_i = a_i \quad (0 \leq i \leq n)$

编码有穷序列

定义 (串接函数)

定义关于 a 和 b 的二元函数 $a \frown b := a \cdot \prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i+1}$

命题

- $x \frown y$ 是原始递归的
- $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \frown \langle b_0, \ldots, b_m \rangle = \langle a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \rangle$

编码有穷序列

定义 (串接函数)

定义关于 a 和 b 的二元函数 $a \frown b := a \cdot \prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i+1}$

命题

- $x \frown y$ 是原始递归的
- $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \frown \langle b_0, \ldots, b_m \rangle = \langle a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \rangle$

编码有穷序列

定义 (串接函数)

定义关于 a 和 b 的二元函数 $a \frown b := a \cdot \prod_{i<\mathrm{lh}(b)} p_{\mathrm{lh}(a)+i}^{(b)_i+1}$

命题

- $x \frown y$ 是原始递归的
- $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \frown \langle b_0, \ldots, b_m \rangle = \langle a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \rangle$

编码有穷序列

引理

集合 $\left\{a \in \mathbb{N} \;\middle|\; a \text{ 是有穷序列的哥德尔编码} \right\}$ 是原始递归的

习题：

7.1.5、7.1.7、7.1.8、7.1.9*

讲义中提到的习题