数理逻辑 II

Mathematical Logic II

杨睿之

yangruizhi@fudan.edu.cn

复旦大学哲学学院

2015 年春

上课之前

logic.fudan.edu.cn

上课之前

上课之前

习题课安排

考核方式

上学期回顾

上学期回顾

- 形式语言
- 对“逻辑推理”的语法刻画
- 对“逻辑推理”的语义刻画

定理 (哥德尔完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \iff \Sigma \vdash \tau$$

我们对“逻辑推理”的刻画是正确且充分的（？）

上学期回顾

- 形式语言
- 对“逻辑推理”的语法刻画
- 对“逻辑推理”的语义刻画

定理 (哥德尔完全性定理)

$$\Sigma \vDash \tau \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash \tau$$

我们对“逻辑推理”的刻画是正确且充分的（？）

上学期回顾

- 形式语言
- 对“逻辑推理”的语法刻画
- 对“逻辑推理”的语义刻画

定理 (哥德尔完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \iff \Sigma \vdash \tau$$

我们对“逻辑推理”的刻画是正确且充分的（？）

上学期回顾

- 形式语言
- 对“逻辑推理”的语法刻画
- 对“逻辑推理”的语义刻画

定理 (哥德尔完全性定理)

$$\Sigma \vDash \tau \iff \Sigma \vdash \tau$$

我们对“逻辑推理”的刻画是正确且充分的（？）

上学期回顾

- 形式语言
- 对“逻辑推理”的语法刻画
- 对“逻辑推理”的语义刻画

定理 (哥德尔完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \iff \Sigma \vdash \tau$$

我们对“逻辑推理”的刻画是正确且充分的（？）

上学期回顾

- 形式语言
- 对“逻辑推理”的语法刻画
- 对“逻辑推理”的语义刻画

定理 (哥德尔完全性定理)

$$\Sigma \models \tau \quad \Leftrightarrow \quad \Sigma \vdash \tau$$

我们对“逻辑推理”的刻画是正确且充分的（？）

本学期我们将看到的风景

哥德尔的两个不完全性定理

不完全性定理

哥德尔第一不完全性定理

定理 (Gödel 1930.8)

对任意包涵罗宾逊算术（ *Robinson Arithmetic* ）且可公理化的理论 T，若 T 一致，则 T 不是完全的。

特别地，令 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, S, +, \cdot, 0)$，则没有 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 的公理化。

不完全性定理

哥德尔第一不完全性定理

定理 (Gödel 1930.8)

对任意包涵罗宾逊算术（*Robinson Arithmetic*）且可公理化的理论 T，若 T 一致，则 T 不是完全的。

特别地，令 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, S, +, \cdot, 0)$，则没有 $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ 的公理化。

不完全性定理

哥德尔第二不完全性定理

定理 (Gödel 1930.11)

假设 T 是一个足够强的公理系统，例如皮亚诺算术（*Peano Arithmetic*）。如果 T 一致，则 T 无法证明"T 是一致的"

数学意义

希尔伯特 23 个数学问题

1900 年巴黎国际数学家大会。引领了整个 20 世纪乃至今天的数学研究。

其中与数理逻辑有关的问题：

1st 连续统假设问题

2nd 证明算术公理的一致性

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

1900 年巴黎国际数学家大会。引领了整个 20 世纪乃至今天的数学研究。

其中与数理逻辑有关的问题：

1st 连续统假设问题

2nd 证明算术公理的一致性

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

1900 年巴黎国际数学家大会。引领了整个 20 世纪乃至今天的数学研究。

其中与数理逻辑有关的问题：

- 1st 连续统假设问题
- 2nd 证明算术公理的一致性
- 10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

1900 年巴黎国际数学家大会。引领了整个 20 世纪乃至今天的数学研究。

其中与数理逻辑有关的问题：

1st 连续统假设问题

2nd 证明算术公理的一致性

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

1900 年巴黎国际数学家大会。引领了整个 20 世纪乃至今天的数学研究。

其中与数理逻辑有关的问题：

1st 连续统假设问题

2nd 证明算术公理的一致性

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

1900 年巴黎国际数学家大会。引领了整个 20 世纪乃至今天的数学研究。

其中与数理逻辑有关的问题：

1st 连续统假设问题

2nd 证明算术公理的一致性

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

2nd 证明算术公理的一致性

哥德尔第二不完全性定理：算术公理 PA 证明不了自己的一致性（如果它是一致的话）

定理 (Gentzen 1936)

PA 是一致的

怎么回事？

希尔伯特 23 个数学问题

2nd 证明算术公理的一致性

哥德尔第二不完全性定理：算术公理 PA 证明不了自己的一致性（如果它是一致的话）

定理 (Gentzen 1936)

PA 是一致的

怎么回事？

希尔伯特 23 个数学问题

2nd 证明算术公理的一致性

哥德尔第二不完全性定理：算术公理 PA 证明不了自己的一致性（如果它是一致的话）

定理 (Gentzen 1936)

PA 是一致的

怎么回事？

希尔伯特 23 个数学问题

2nd 证明算术公理的一致性

哥德尔第二不完全性定理：算术公理 PA 证明不了自己的一致性（如果它是一致的话）

定理 (Gentzen 1936)

PA 是一致的

怎么回事？

希尔伯特 23 个数学问题

2nd 证明算术公理的一致性

哥德尔第二不完全性定理：算术公理 PA 证明不了自己的一致性（如果它是一致的话）

定理 (Gentzen 1936)

PA 是一致的

怎么回事？

希尔伯特 23 个数学问题

哥德尔第一不完全性定理：任何包涵算术的公理系统总存在独立的命题

在第一不完全定理的证明中，那个独立命题可以被理解为“我不可证”。在第二不完全性定理中，那个命题是“我是一致的”。

有没有自然的不独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

哥德尔第一不完全性定理：任何包涵算术的公理系统总存在独立的命题

在第一不完全定理的证明中，那个独立命题可以被理解为“我不可证”。在第二不完全性定理中，那个命题是“我是一致的”。

有没有自然的不独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

哥德尔第一不完全性定理：任何包涵算术的公理系统总存在独立的命题

在第一不完全定理的证明中，那个独立命题可以被理解为“我不可证”。在第二不完全性定理中，那个命题是“我是一致的”。

有没有自然的不独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

自然的独立命题：

- Paris-Harrington 定理、古德斯坦定理与九头蛇问题（独立于 PA）
- 连续统假设（独立于 ZFC）

有没有不依赖于一致性强度的，算术的独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

自然的独立命题：

- Paris-Harrington 定理、古德斯坦定理与九头蛇问题（独立于 PA）
- 连续统假设（独立于 ZFC）

有没有不依赖于一致性强度的，算术的独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

自然的独立命题：

- Paris-Harrington 定理、古德斯坦定理与九头蛇问题（独立于 PA）
- 连续统假设（独立于 ZFC）

有没有不依赖于一致性强度的，算术的独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

自然的独立命题：

- Paris-Harrington 定理、古德斯坦定理与九头蛇问题（独立于 PA）
- 连续统假设（独立于 ZFC）

有没有不依赖于一致性强度的，算术的独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

自然的独立命题：

- Paris-Harrington 定理、古德斯坦定理与九头蛇问题（独立于 PA）
- 连续统假设（独立于 ZFC）

有没有不依赖于一致性强度的，算术的独立命题？

希尔伯特 23 个数学问题

对机械过程的定义

- 哥德尔：递归函数
- 图灵：图灵机

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

对机械过程的定义

- 哥德尔：递归函数
- 图灵：图灵机

10th 丢番图方程可解的判定问题

希尔伯特 23 个数学问题

对机械过程的定义

- 哥德尔：递归函数
- 图灵：图灵机

10th 丢番图方程可解的判定问题

编码的思想

如何在算术语言中表达“我不可证”、“我是一致的”？

不完全性定理的哲学意义

1930 Königsberg

卡尔纳普（Carnap）、海丁（Heyting）、冯诺依曼（von Neumann）分别站在逻辑主义、直觉主义、形式主义的立场上做了一小时的数学哲学报告。

希尔伯特的退休演讲：

Wir müssen wissen.

Wir werden wissen.

1930 Königsberg

卡尔纳普（Carnap）、海丁（Heyting）、冯诺依曼（von Neumann）分别站在逻辑主义、直觉主义、形式主义的立场上做了一小时的数学哲学报告。

希尔伯特的退休演讲：

Wir müssen wissen.

Wir werden wissen.

数学基础问题

逻辑主义：

- 弗雷格：把数学建立在逻辑的基础之上
- 罗素： 罗素悖论、类型论

数学基础问题

逻辑主义：

- 弗雷格：把数学建立在逻辑的基础之上
- 罗素： 罗素悖论、类型论

希尔伯特纲领

（希尔伯特式）形式主义：

数学无非是在一个形式系统中作证明。但希尔伯特希望为所有已有的经典数学辩护。

希尔伯特纲领

希尔伯特纲领

- 数学的形式化。让所有数学命题在一个统一的形式语言中得到表达。（done）
- 找到一个公理系统，证明它是完全的，即所有数学命题在这个系统中被决定
- 对上述系统给出一个有穷主义的一致性证明

希尔伯特纲领

希尔伯特纲领

- 数学的形式化。让所有数学命题在一个统一的形式语言中得到表达。（done）
- 找到一个公理系统，证明它是完全的，即所有数学命题在这个系统中被决定
- 对上述系统给出一个有穷主义的一致性证明

希尔伯特纲领

- 数学的形式化。让所有数学命题在一个统一的形式语言中得到表达。（done）
- 找到一个公理系统，证明它是完全的，即所有数学命题在这个系统中被决定
- 对上述系统给出一个有穷主义的一致性证明

希尔伯特纲领

希尔伯特纲领

- 数学的形式化。让所有数学命题在一个统一的形式语言中得到表达。（done）
- 找到一个公理系统，证明它是完全的，即所有数学命题在这个系统中被决定
- 对上述系统给出一个有穷主义的一致性证明

从希尔伯特纲领到哥德尔纲领

哥德尔定理看似判定了希尔伯特纲领不可实现。因为，第一不完全性定理断定无法找到算术的完全的公理系统；第二不完全性定理表明，PA 证明不了自己的一致性，那么一般认为更弱的有穷主义算术更证明不了了。

哥德尔纲领：

寻找新公理并为之辩护，以判定每一则数学命题

从希尔伯特纲领到哥德尔纲领

哥德尔定理看似判定了希尔伯特纲领不可实现。因为，第一不完全性定理断定无法找到算术的完全的公理系统；第二不完全性定理表明，PA 证明不了自己的一致性，那么一般认为更弱的有穷主义算术更证明不了了。

哥德尔纲领：

寻找新公理并为之辩护，以判定每一则数学命题

从希尔伯特纲领到哥德尔纲领

哥德尔定理看似判定了希尔伯特纲领不可实现。因为，第一不完全性定理断定无法找到算术的完全的公理系统；第二不完全性定理表明，PA 证明不了自己的一致性，那么一般认为更弱的有穷主义算术更证明不了了。

哥德尔纲领：

寻找新公理并为之辩护，以判定每一则数学命题

从希尔伯特纲领到哥德尔纲领

哥德尔定理看似判定了希尔伯特纲领不可实现。因为，第一不完全性定理断定无法找到算术的完全的公理系统；第二不完全性定理表明，PA 证明不了自己的一致性，那么一般认为更弱的有穷主义算术更证明不了了。

哥德尔纲领：

寻找新公理并为之辩护，以判定每一则数学命题

直觉主义

数学的“修正主义”：

数学是心灵的构造。因此，数学证明必须是可构造的。例如，要证明 $A \vee B$ 就必须构造一个有序对 $\langle a, b\rangle$，或者 $a = 0$ 且 b 是对 A 的证明，或者 $a = 1$ 且 b 是对 B 的证明。

因此，直觉主义拒绝排中律

直觉主义

数学的“修正主义”：

数学是心灵的构造。因此，数学证明必须是可构造的。例如，要证明 $A \vee B$ 就必须构造一个有序对 $\langle a, b\rangle$，或者 $a = 0$ 且 b 是对 A 的证明，或者 $a = 1$ 且 b 是对 B 的证明。因此，直觉主义拒绝排中律

直觉主义

数学的“修正主义”：

数学是心灵的构造。因此，数学证明必须是可构造的。例如，要证明 $A \vee B$ 就必须构造一个有序对 $\langle a, b\rangle$，或者 $a = 0$ 且 b 是对 A 的证明，或者 $a = 1$ 且 b 是对 B 的证明。因此，直觉主义拒绝排中律

不完全性是普遍现象吗？

- 简化版本的自然数模型及其完全理论
- 无端点稠密线性序理论
- 稠密（atomless）布尔代数理论
- 随机图（random graph）理论
- The theory of infinite divisible torsion-free abelian groups
- 代数闭域（algebraically closed field）理论，也即复数域的理论

……

旅行的意义