前情提要

前情提要

可靠性定理：

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明要点：

- 检验每条公理都是有效的
- 替换引理：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$

前情提要

可靠性定理：

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明要点：

- 检验每条公理都是有效的
- 替换引理：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$

前情提要

可靠性定理：

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi$$

证明要点：

- 检验每条公理都是有效的
- 替换引理：$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi^x_t \iff (\mathfrak{A}, s^x_{\bar{s}(t)}) \vDash \varphi$

完全性定理

完全性定理

定理 (完全性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$. Γ 是 $\mathcal{L}$ 公式集，φ 是 $\mathcal{L}$ 公式，则

$$\Gamma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

也即，对任意公式集 Σ，如果 Σ 一致，那么 Σ 可满足

完全性定理

定理 (完全性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$．Γ 是 $\mathcal{L}$ 公式集，φ 是 $\mathcal{L}$ 公式，则

$$\Gamma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \varphi$$

也即，对任意公式集 Σ，如果 Σ 一致，那么 Σ 可满足

完全性定理

证明思路 给定一致的 $\mathcal{L}$ 公式集 Σ，我们要构造一个它的 $\mathcal{L}$ 模型 $\mathfrak{A}$ 以及赋值 s：

- 将 Σ 扩张为一个极大一致集 Δ，以获得足够多的信息
- 将 $\mathcal{L}$ 中的所有项作为论域中元素
- 变元、常数符号、函数符号解释依据项本身的构造
- 关系依据 Δ 中原子公式的提示
- 证明 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$ ，即对任意 φ，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Delta$

完全性定理

证明思路 给定一致的 $\mathcal{L}$ 公式集 Σ，我们要构造一个它的 $\mathcal{L}$ 模型 $\mathfrak{A}$ 以及赋值 s：

- 将 Σ 扩张为一个极大一致集 Δ，以获得足够多的信息
- 将 $\mathcal{L}$ 中的所有项作为论域中元素
- 变元、常数符号、函数符号解释依据项本身的构造
- 关系依据 Δ 中原子公式的提示
- 证明 $(\mathfrak{A}, s) \models \Delta$ ，即对任意 φ，$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi \;\Rightarrow\; \varphi \in \Delta$

完全性定理

难点：

- 等式： $t_1 \approx t_2$

  如果对任意项 t，$\bar{s}(t) = t$，那么对不同的项 t_1, t_2，有 $(\mathfrak{A}, s) \not\models t_1 \approx t_2$，但可能同时也有 $t_1 \approx t_2 \in \Delta$

- 否定式： $\neg\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \models \neg\alpha$，要证明 $\neg\alpha \in \Delta$，需要有 $\alpha \notin \Delta$，这需要更强的归纳假设

完全性定理

难点：

- 等式： $t_1 \approx t_2$

  如果对任意项 t，$\bar{s}(t) = t$，那么对不同的项 t_1, t_2，有 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash t_1 \approx t_2$，但可能同时也有 $t_1 \approx t_2 \in \Delta$

- 否定式： $\neg\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\alpha$，要证明 $\neg\alpha \in \Delta$，需要有 $\alpha \notin \Delta$，这需要更强的归纳假设

完全性定理

难点：

- 等式： $t_1 \approx t_2$
  如果对任意项 t，$\bar{s}(t) = t$，那么对不同的项 t_1, t_2，有 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash t_1 \approx t_2$，但可能同时也有 $t_1 \approx t_2 \in \Delta$
- 否定式： $\neg\beta$
  假设 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\alpha$，要证明 $\neg\alpha \in \Delta$，需要有 $\alpha \notin \Delta$，这需要更强的归纳假设

完全性定理

难点：

- 等式： $t_1 \approx t_2$

  如果对任意项 t，$\bar{s}(t) = t$，那么对不同的项 t_1, t_2，有 $(\mathfrak{A}, s) \nvDash t_1 \approx t_2$，但可能同时也有 $t_1 \approx t_2 \in \Delta$

- 否定式： $\neg\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \neg\alpha$，要证明 $\neg\alpha \in \Delta$，需要有 $\alpha \notin \Delta$，这需要更强的归纳假设

完全性定理

难点：

- 全称式： $\forall x\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \models \forall x\beta$，为了证明 $\forall x\beta \in \Delta$，我们需要证明 $(\neg\forall x\beta) \notin \Delta$。但由 $\models \forall x\beta \to \beta^x_t$，我们最多得到 $\beta^x_t \in \Delta$，从而 $\neg\beta^x_t \notin \Delta$

  解决思路： 我们事先在 Δ 中加入一些诸如

$$\neg\forall x\beta \to \neg\beta^x_t$$

  的公式

完全性定理

难点：

- 全称式： $\forall x\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\beta$，为了证明 $\forall x\beta \in \Delta$，我们需要证明 $(\neg\forall x\beta) \notin \Delta$。但由 $\vDash \forall x\beta \to \beta^x_t$，我们最多得到 $\beta^x_t \in \Delta$，从而 $\neg\beta^x_t \notin \Delta$

  解决思路： 我们事先在 Δ 中加入一些诸如

  $$\neg\forall x\beta \to \neg\beta^x_t$$

  的公式

完全性定理

难点：

- 全称式： $\forall x\beta$

  假设 $(\mathfrak{A}, s) \vDash \forall x\beta$，为了证明 $\forall x\beta \in \Delta$，我们需要证明 $(\neg\forall x\beta) \notin \Delta$。但由 $\vDash \forall x\beta \to \beta^x_t$，我们最多得到 $\beta^x_t \in \Delta$，从而 $\neg\beta^x_t \notin \Delta$

  解决思路： 我们事先在 Δ 中加入一些诸如

$$\neg\forall x\beta \to \neg\beta^x_t$$

  的公式

完全性定理

给定语言 $\mathcal{L}$ 和一致的公式集 Σ。

首先，我们在语言中添加可数无穷多个新的常数符号 $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$，令 $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup C$

由于语言改变了，Σ 在新的语言中能证明的公式多了。我们要证明 Σ 在新的语言中仍然是一致的。

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$ 且推演中不出现 c

完全性定理

给定语言 $\mathcal{L}$ 和一致的公式集 Σ。

首先，我们在语言中添加可数无穷多个新的常数符号 $C = \{c_0, c_1, \ldots\}$，令 $\mathcal{L}_C = \mathcal{L} \cup C$

由于语言改变了，Σ 在新的语言中能证明的公式多了。我们要证明 Σ 在新的语言中仍然是一致的。

定理 (常数概括定理)

假设 $\Gamma \vdash \varphi$，且常数符号 c 不在 Γ 中出现，则存在不在 φ 中出现的变元 y，使得 $\Gamma \vdash \forall y \varphi^c_y$ 且推演中不出现 c

完全性定理

其次，对每一对 $\mathcal{L}_C$ 中公式 φ 和变元 x 的组合，添加一条辛钦公理：

$$\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$$

其中，每个 c 对应唯一一组 (φ, x)，且不在所对应的 φ 中出现（否则可能导致不一致）

完全性定理

添加辛钦公理的做法：

- 枚举有序对 (φ, x)：$\{(\varphi_1, x_1), (\varphi_2, x_2), \ldots\}$

  注意：对 $i \neq j$，可能 $\varphi_i = \varphi_j$ 或 $x_i = x_j$

- 令 $\theta_k = (\neg\forall x_k \varphi_k \to \neg(\varphi_k)^{x_k}_{c_{i_k}})$

  其中，c_{i_k} 是 $\{c_0, c_1, \ldots\}$ 枚举中，第一个不在任何已定义的 θ_i（$i < k$）和 φ_k 中出现的常数符号

- 令 $\Theta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \theta_i$

完全性定理

添加辛钦公理的做法：

- 枚举有序对 (φ, x)：$\{(\varphi_1, x_1), (\varphi_2, x_2), \ldots\}$

  注意：对 $i \neq j$，可能 $\varphi_i = \varphi_j$ 或 $x_i = x_j$

- 令 $\theta_k = (\neg\forall x_k\varphi_k \to \neg(\varphi_k)^{x_k}_{c_{i_k}})$

  其中，c_{i_k} 是 $\{c_0, c_1, \ldots\}$ 枚举中，第一个不在任何已定义的 θ_i（$i < k$）和 φ_k 中出现的常数符号

- 令 $\Theta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \theta_i$

完全性定理

添加辛钦公理的做法：

- 枚举有序对 (φ, x)：$\{(\varphi_1, x_1), (\varphi_2, x_2), \ldots\}$

  注意：对 $i \neq j$，可能 $\varphi_i = \varphi_j$ 或 $x_i = x_j$

- 令 $\theta_k = (\neg\forall x_k\varphi_k \rightarrow \neg(\varphi_k)^{x_k}_{c_{i_k}})$

  其中，c_{i_k} 是 $\{c_0, c_1, \ldots\}$ 枚举中，第一个不在任何已定义的 θ_i（$i < k$）和 φ_k 中出现的常数符号

- 令 $\Theta = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \theta_i$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：

反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$

  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \varphi_c^x\right)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：

反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$
  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c$
- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$
  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c) \rightarrow \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和
  $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c) \rightarrow \varphi^x_c\right)^P$ 都是重言式]
- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：

反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$

  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \varphi_c^x\right)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：

反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$

  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$

  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \varphi^x_c\right)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：

反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$

  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$

  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \to \varphi^x_c\right)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：
反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$

  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$

- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和
  $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \varphi_c^x\right)^P$ 都是重言式]

- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

我们需要证明，添加辛钦公理后，$\Sigma \cup \Theta$ 仍然是一致的：

反设存在最小的 m，使得 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_{m+1}\}$ 不一致，

- 则 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{k+1}$

  假设 $\theta_{k+1} = \neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x$
- 则有 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi$ 以及 $\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi_c^x$

  [因为 $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \neg\forall x\varphi\right)^P$ 和

  $\left(\neg(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi_c^x) \to \varphi_c^x\right)^P$ 都是重言式]
- 由常数概括定理，$\Sigma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi$

完全性定理

将一致的公式集 $\Sigma \cup \Theta$ 扩张为极大一致集 Δ

极大一致集性质： 对任意公式 φ

- 或者 $\varphi \in \Delta$，或者 $\neg\varphi \in \Delta$
- 若 $\Delta \vdash \varphi$，则 $\varphi \in \Delta$

完全性定理

将一致的公式集 $\Sigma \cup \Theta$ 扩张为极大一致集 Δ

极大一致集性质： 对任意公式 φ

- 或者 $\varphi \in \Delta$，或者 $\neg\varphi \in \Delta$
- 若 $\Delta \vdash \varphi$，则 $\varphi \in \Delta$

完全性定理

运用极大一致集 Δ 丰富的信息，构造一个它的模型 $\mathfrak{A}$：

- 令 T 是语言 $\mathcal{L}_C$ 中所有项的集合。定义

$$|\mathfrak{A}| = T/E = \left\{ [t]_E \,\middle|\, t \in T \right\}$$

其中，E 是 T 上的二元关系，定义如下：

$$(t_1, t_2) \in E \Leftrightarrow t_1 \approx t_2 \in \Delta$$

需要证明：E 是等价关系

完全性定理

运用极大一致集 Δ 丰富的信息，构造一个它的模型 $\mathfrak{A}$：

- 令 T 是语言 $\mathcal{L}_C$ 中所有项的集合。定义

$$|\mathfrak{A}| = T/E = \left\{ [t]_E \;\middle|\; t \in T \right\}$$

其中，E 是 T 上的二元关系，定义如下：

$$(t_1, t_2) \in E \;\Leftrightarrow\; t_1 \approx t_2 \in \Delta$$

需要证明：E 是等价关系

完全性定理

运用极大一致集 Δ 丰富的信息，构造一个它的模型 $\mathfrak{A}$：

- 令 T 是语言 $\mathcal{L}_C$ 中所有项的集合。定义

$$|\mathfrak{A}| = T/E = \left\{ [t]_E \,\middle|\, t \in T \right\}$$

其中，E 是 T 上的二元关系，定义如下：

$$(t_1, t_2) \in E \;\Leftrightarrow\; t_1 \approx t_2 \in \Delta$$

需要证明：E 是等价关系

完全性定理

回顾：

(Eq1) $\vdash \forall x x \approx x$

(Eq2) $\vdash \forall x \forall y (x \approx y \to y \approx x)$

(Eq3) $\vdash \forall x \forall y \forall z (x \approx y \to y \approx z \to x \approx z)$

完全性定理

- 对 n 元谓词符号 P，定义 $P^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元关系：

$$([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) \in P^{\mathfrak{A}} \iff Pt_1 \ldots t_n \in \Delta$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则

$$Pt_1 \ldots t_n \in \Delta \iff Pu_1 \ldots u_n \in \Delta$$

考虑：

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 n 元谓词符号 P，定义 $P^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元关系：

$$([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) \in P^{\mathfrak{A}} \quad \Leftrightarrow \quad Pt_1 \ldots t_n \in \Delta$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则

$$Pt_1 \ldots t_n \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad Pu_1 \ldots u_n \in \Delta$$

考虑：

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$

$Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 n 元谓词符号 P，定义 $P^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元关系：

$$([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) \in P^{\mathfrak{A}} \iff Pt_1 \ldots t_n \in \Delta$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则

$$Pt_1 \ldots t_n \in \Delta \iff Pu_1 \ldots u_n \in \Delta$$

考虑：

(Eq4) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to$

$Px_1 \ldots x_n \to Py_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 n 元函数符号 f，定义 $f^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元函数：

$$f^{\mathfrak{A}}([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) = [ft_1 \ldots f_n]_E$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则 $(ft_1 \ldots t_n, fu_1 \ldots u_n) \in E$

考虑：

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 n 元函数符号 f，定义 $f^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元函数：

$$f^{\mathfrak{A}}([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) = [ft_1 \ldots f_n]_E$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则 $(ft_1 \ldots t_n, fu_1 \ldots u_n) \in E$

考虑：

$$\text{(Eq5)} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$$

完全性定理

- 对 n 元函数符号 f，定义 $f^{\mathfrak{A}}$ 为 $|\mathfrak{A}|$ 上 n 元函数：

$$f^{\mathfrak{A}}([t_1]_E, \ldots, [t_n]_E) = [ft_1 \ldots f_n]_E$$

需要证明：若 $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n) \in E$，则 $(ft_1 \ldots t_n, fu_1 \ldots u_n) \in E$

考虑：

(Eq5) $\vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \to \cdots \to x_n \approx y_n \to fx_1 \ldots x_n \approx fy_1 \ldots y_n)$

完全性定理

- 对 $\mathcal{L}_C$ 中的常数符号 c，令 $c^{\mathfrak{A}} = [c]_E$

以上，完成了对 $\mathfrak{A}$ 的构造。

还需定义 $\mathfrak{A}$ 赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$：

$$s(x) = [x]_E$$

完全性定理

- 对 $\mathcal{L}_C$ 中的常数符号 c，令 $c^{\mathfrak{A}} = [c]_E$

以上，完成了对 $\mathfrak{A}$ 的构造。

还需定义 $\mathfrak{A}$ 赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$：

$$s(x) = [x]_E$$

完全性定理

- 对 $\mathcal{L}_C$ 中的常数符号 c，令 $c^{\mathfrak{A}} = [c]_E$

以上，完成了对 $\mathfrak{A}$ 的构造。

还需定义 $\mathfrak{A}$ 赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$：

$$s(x) = [x]_E$$

完全性定理

我们证明：对任何 $\mathcal{L}$ 公式，

$$(\mathfrak{A}, s) \models \alpha \iff \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳：

- $\alpha = t_1 \approx t_2$

完全性定理

我们证明：对任何 $\mathcal{L}$ 公式，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \iff \alpha \in \varDelta$$

对公式 α 归纳：

- $\alpha = t_1 \approx t_2$

完全性定理

我们证明：对任何 $\mathcal{L}$ 公式，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳：

- $\alpha = Pt_1 \dots t_n$

完全性定理

我们证明：对任何 $\mathcal{L}$ 公式，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \iff \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳：

- $\alpha = \neg\beta$

完全性定理

我们证明：对任何 $\mathcal{L}$ 公式，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳：

- $\alpha = \beta \to \gamma$

完全性定理

我们证明：对任何 $\mathcal{L}$ 公式，

$$(\mathfrak{A}, s) \vDash \alpha \iff \alpha \in \Delta$$

对公式 α 归纳：

- $\alpha = \forall x \beta$

完全性定理

因此，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$ ，由于 $\Sigma \subset \Delta$，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Sigma$

注意：

我们需要证明的是，Σ 作为一个 $\mathcal{L}$ 公式集是可满足的。

对此，只需把 $\mathfrak{A}$ 限制在 $\mathcal{L}$ 上，它就是一个满足 Σ 的 $\mathcal{L}$ 结构

完全性定理

因此，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$ ，由于 $\Sigma \subset \Delta$，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Sigma$

注意：

我们需要证明的是，Σ 作为一个 $\mathcal{L}$ 公式集是可满足的。

对此，只需把 $\mathfrak{A}$ 限制在 $\mathcal{L}$ 上，它就是一个满足 Σ 的 $\mathcal{L}$ 结构

完全性定理

因此，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$ ，由于 $\Sigma \subset \Delta$，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Sigma$

注意：

我们需要证明的是，Σ 作为一个 $\mathcal{L}$ 公式集是可满足的。

对此，只需把 $\mathfrak{A}$ 限制在 $\mathcal{L}$ 上，它就是一个满足 Σ 的 $\mathcal{L}$ 结构

完全性定理

因此，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Delta$ ，由于 $\Sigma \subset \Delta$，$(\mathfrak{A}, s) \vDash \Sigma$

注意：

我们需要证明的是，Σ 作为一个 $\mathcal{L}$ 公式集是可满足的。

对此，只需把 $\mathfrak{A}$ 限制在 $\mathcal{L}$ 上，它就是一个满足 Σ 的 $\mathcal{L}$ 结构

紧致性定理及其应用

定理 (紧致性定理)

给定语言 $\mathcal{L}$，Γ 是一集 $\mathcal{L}$ 公式。那么 Γ 是可满足的当且仅当它的每个有穷子集是可满足的。

Proof.

定理

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$，Σ 是 $\mathcal{L}$ 的一个闭语句集。假设它有任意大的有穷模型，那么它就有任意大的无穷模型。

推论

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$。所有有穷 $\mathcal{L}$ 结构组成的类不是初等类，所有无穷结构组成的类不是广义初等类。

紧致性定理及其应用

定理

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$，Σ 是 $\mathcal{L}$ 的一个闭语句集。假设它有任意大的有穷模型，那么它就有任意大的无穷模型。

推论

给定含有等词的语言 $\mathcal{L}$。所有有穷 $\mathcal{L}$ 结构组成的类不是初等类，所有无穷结构组成的类不是广义初等类。

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 所有 *Torsion* 群组成的类不是广义初等类
- 所有 *Torsion-free* 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 *0* 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 *0* 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 所有 *Torsion* 群组成的类不是广义初等类
- 所有 *Torsion-free* 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 0 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 0 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 所有 *Torsion* 群组成的类不是广义初等类
- 所有 *Torsion-free* 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 *0* 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 *0* 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 所有 *Torsion* 群组成的类不是广义初等类
- 所有 *Torsion-free* 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 *0* 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 *0* 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

紧致性定理及其应用

类似地：

定理

- 所有 *Torsion* 群组成的类不是广义初等类
- 所有 *Torsion-free* 的群组成的类不是初等类
- 所有特征 *0* 的域组成的类不是初等类。因此，对任何域的一阶语言的闭语句 σ，如果它在所有特征 *0* 的域中成立，那么它也在某个特征 p 的域中成立

……

紧致性定理及其应用

存在非标准的算术模型

定理

令 $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ 是标准算术模型。那么存在一个非标准算术模型 $\mathfrak{N}^*$，$\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^*$ 且 $\mathfrak{N}^*$ 含有“无穷”（非标准）自然数

习题

6.2 (3) 6.4 (3), (4), (5)